



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

FUNDAMENTOS DE SISTEMAS LINEALES E INVARIANTES EN EL
TIEMPO Y UN VISTAZO A APLICACIONES: FILTROS ACÚSTICOS
HRTF Y AUDICIÓN HUMANA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A :

CÉSAR VILLEGAS BARRÓN

TUTOR

DR. CALEB ANTONIO RASCÓN ESTEBANE



CIUDAD UNIVERSITARIA, Cd. Mx., 2024

Agradecimientos

...

Resumen

Esta tesis consta de cuatro partes, en la primera se presenta un trabajo monográfico (en el contexto de la teoría matemática del control) sobre fundamentos y resultados de teoría de sistemas lineales e invariantes en el tiempo (de tiempo discreto, tiempo continuo, y dimensión finita), con los cuales se pueden explicar relaciones matemáticas importantes entre los términos: sistema, caja negra, convolución, impulso, respuesta al impulso y función (o matriz) de transferencia. También se discute el papel del análisis de Fourier en la teoría de sistemas LIT, y se discute el concepto de muestreo como un recurso para transitar de un sistema continuo a uno discreto.

En la segunda parte, se expone como la teoría de sistemas LIT se aplica al fenómeno físico del sonido y el procesamiento digital de señales acústicas para dar una explicación y fundamento teórico al escenario de la obtención del filtro acústico *HRTF* (*head related transfer function*).

Posteriormente, se da una breve introducción a los conceptos de “*machine hearing*” e “imagen auditiva” de Richard Lyon, donde se aplica la teoría del control y la teoría de sistemas LIT al proceso fisiológico de la audición humana y la audición robótica.

Finalmente, se presenta un trabajo monográfico sobre la habilidad humana de localización (en el contexto de la audición espacial), y se concluye con la presentación de una aplicación hecha en MaxMSP, que busca simular el comportamiento de filtros HRTF en el plano horizontal.

Palabras clave: teoría del control, sistemas lineales e invariantes en el tiempo, convolución, impulso, respuesta al impulso, función de transferencia, HRTF, audición espacial, localización, auralización, realidad virtual auditiva, audición, imagen auditiva.

Índice general

Agradecimientos	III
Resumen	V
1. Introducción	1
1.1. Antecedentes que motivan esta tesis	1
1.1.1. Audición espacial, localización y el SCRC	1
1.1.2. Auralización en la música y filtros acústicos HRTF	4
1.1.3. Teoría del control y sistemas lineales e invariantes en el tiempo	7
1.2. Planteamiento del problema	8
1.3. Justificación	9
1.4. Objetivos, alcances y contenido	10
2. Teoría del control y sistemas lineales e invariantes en el tiempo (de dimensión finita)	13
2.1. Preliminares	13
2.1.1. Teoría de integración	13
2.1.2. Ecuaciones diferenciales ordinarias y lineales	16
2.2. Teoría del control: de sistemas generales a sistemas LIT	21
2.2.1. Definiciones básicas	21
2.2.2. Sistemas LIT de tiempo discreto	25
2.2.3. Sistemas LIT de tiempo continuo	28
2.3. Convolución, impulso, respuesta al impulso y la matriz de transferencia	32
2.3.1. Sucesión de Markov $CA^k B$ y comportamientos UBIBO	32
2.3.2. Convolución, impulso, y obtención de la respuesta al impulso	34
2.3.3. La matriz (o función) de transferencia	37
2.4. Relación con el análisis de Fourier y muestreo	45
2.4.1. El teorema de Fourier y la importancia de la función de transferencia	45
2.4.2. La transformada de Fourier	49
2.4.3. Comportamientos muestreados, teorema de muestreo y transformadas discretas de Fourier	51
2.5. Resumen sobre los sistemas y comportamientos LIT	56
2.6. Observaciones finales	59
3. El sonido como sistema lineal e invariante en el tiempo y la medición directa de HRTFs	61
3.1. Perspectiva general del sonido	61
3.1.1. Representaciones matemáticas del sonido	61

3.1.2. Breve revisión de conceptos acústicos	65
3.2. ¿La propagación del sonido es un sistema LIT?	71
3.3. Medición directa de HRTFs	75
3.3.1. El impulso en acústica y las señales de prueba (<i>test signals</i>)	75
3.3.2. La teoría detrás de la medición directa de HRTFs	76
3.3.3. Breve vistazo a la práctica: captura de HRTFs en cámaras anecóicas	79
3.4. Observaciones finales	80
4. Perspectiva general de los primeros tres sectores del sistema auditivo y una introducción a las imágenes auditivas de R. Lyon	83
4.1. Oído externo y medio	85
4.2. Oído interno	88
4.2.1. La membrana basilar (MB)	89
4.2.2. El órgano de Corti	92
4.2.3. Fibras nerviosas auditivas	95
4.3. Resumen de los primeros tres sectores del oído	100
4.4. Introducción a las imágenes auditivas de Lyon	101
4.4.1. El modelo del procesamiento de una pista de DTI de Jeffress	103
4.4.2. El modelo de percepción de altura de Licklider	104
4.4.3. La imagen auditiva	111
4.5. Observaciones finales	116
5. Localización en el SNCA e implementación de un modelo de HRTF para el plano horizontal	117
5.1. Las pistas de la localización	117
5.1.1. Pistas binaurales: DTI y DII	118
5.1.2. Pistas monaurales o espectrales	125
5.1.3. Localización en el espacio peripersonal y el campo difuso	129
5.2. Justificación fisiológica de las pistas de localización	131
5.2.1. Resumen de la habilidad de localización y el SNCA	134
5.3. Implementación de simulador HRTF (plano horizontal)	134
5.3.1. Interfaz y funcionamiento	135
5.3.2. Modelos y métodos seguidos	136
5.3.3. Efectividad del modelo	140
5.4. Observaciones finales	142
6. Conclusiones	145
A. Apéndice auxiliar para demostraciones	149
A.1. Demostraciones del Capítulo 2	149
A.2. Demostraciones del Capítulo 4 y 5	186
B. Primeras teorías de audición: Helmholtz y Rutherford	195

Índice de figuras

1.1. Sistema de coordenadas referido a la cabeza (SCRC)	3
1.2. SCRC y puntos de captura de HRTFs	6
1.3. Cuadro conceptual de temas que se pretenden abordar en esta tesis	11
2.1. Modo de operar de la función de transición ϕ	23
2.2. Modo de operar de un comportamiento Λ	24
2.3. Gráficas de algunos términos de la sucesión regularizante estándar en $\mathbb{R}$.	36
2.4. Gráfica de $f_k(t) = e^{i2\pi\phi kt}$ para $t \in [0, 3]$ y algún $\phi k \in \mathbb{R}_{\geq 0}$	47
2.5. Ejemplo de una función δ -muestreada y control digital asociado	52
2.6. Cambios en el espectro de Fourier al muestrear una función.	54
2.7. Análisis vs. síntesis.	58
2.8. Distintos casos para un sistema y comportamiento LIT	59
2.9. Diagramas de bloques de un sistema LIT (A, B, C) , y de un sistema LIT con prealimentación (A, B, C, D)	60
2.10. Sistemas en paralelo	60
2.11. Sistemas en cascada	60
3.1. Onda transversal y onda longitudinal	62
3.2. Configuración del experimento Helmholtz con un diapasón	62
3.3. Resultado del experimento de Helmholtz con un diapasón	62
3.4. Ondas sonoras	63
3.5. Ejemplo de un espectrograma	65
3.6. Campo cercano y campo lejano de una fuente sonora	66
3.7. Propagación de ondas planas y ondas esféricas	66
3.8. Fenómenos acústicos que ocurren cuando un tono puro interactúa con un obstáculo	69
3.9. Resonador de Helmholtz	70
3.10. Modelado acústico <i>ray tracing</i>	74
3.11. Escenario real (físico) vs. escenario simulado o virtual del HRTF (DSP) . .	78
3.12. Escenario de la medición directa de HRTFs	79
3.13. Medición de HRTFs con un maniquí KEMAR y formas de tomar los puntos de referencia desde donde se capturan las HRIRs.	80
4.1. Los cuatro sectores del sistema auditivo	84
4.2. Prensa hidráulica	86
4.3. Modelo simplificado del sistema del tímpano y los huecesillos	86
4.4. Partes significativas de la cóclea para el proceso de audición	88
4.5. MB en vista superior y transversal	89

4.6. Onda transversal en la MB	90
4.7. Tonotopía de la membrana basilar	91
4.8. Corte transversal del órgano de Corti	92
4.9. Resultados del experimento de Palmer y Russell	93
4.10. Fenómeno de <i>phase locking</i>	96
4.11. <i>Volley principle</i> o principio de torrente	96
4.12. Ejemplo de un <i>spike raster</i> y su respectivo PSTH	97
4.13. Experimento de Delgutte: neurograma vs. espectrograma	98
4.14. Transformaciones que se proponen para los tres primeros sectores del sistema auditivo	101
4.15. Las cuatro capas del sistema de <i>machine hearing</i> de Lyon	102
4.16. Modelo de Jeffress del procesamiento de una pista de DTI	103
4.17. Esquema básico del proceso neuronal de autocorrelación de Licklider	106
4.18. Construcción de la función de autocorrelación en desarrollo de Licklider	107
4.19. Superficie generada por la función de autocorrelación en desarrollo	108
4.20. Esquema del modelo de Licklider y autocorrelogramas	109
4.21. Gráficas de respuestas al impulso del sistema BFTG.	113
4.22. Valores idóneos para la frecuencia central de 15 filtros gamma	114
4.23. BFTG (32 filtros) y tonotopía respectiva de la membrana basilar	115
4.24. Diagrama de bloques del sistema BFTG	115
5.1. Planos anatómicos respecto al SCRC	118
5.2. Frecuencia vs. longitud de onda en cm	119
5.3. Los dos posibles valores de una DFI	121
5.4. Función DTI máxima vs. máxima frecuencia posible	122
5.5. Cono de la confusión para una DTI con el modelo esférico.	123
5.6. Gráfica de $h(k) = \frac{4k+1}{4(30)(30+1)}$ para $k \in \{0, 1, 2, \dots, 20\}$	124
5.7. Ejemplo de un pulso biaural	125
5.8. Comparación de las FTDs de dos personas	127
5.9. Ejemplo de una FTD “suavizada”	128
5.10. Frecuencia vs. elevación vs. amplitud para una FTD	128
5.11. Efecto de precedencia y <i>summing</i>	130
5.12. Sitios en el tronco encefálico encargados de la audición y localización	131
5.13. Camino de las pistas DTI	133
5.14. Camino de las pistas DII	133
5.15. Interfaz del parche	135
5.16. Configuración del parche	136
5.17. Subparche distFuente	137
5.18. Modelo de una pista DTI (cabeza esférica) de Rayleigh	137
5.19. Subparche DTI	138
5.20. Imitación de un diagrama de Bode	139
5.21. Filtros modelados y FTDs	139
5.22. FTDs o HRTFs que se buscaron modelar	139
5.23. Diagrama de bloques del parche y sectores circulares correspondientes	140
5.24. Resultados del test para distintas direcciones	141
5.25. Resultados del test para distintas direcciones (continuación)	142
B.1. Resonador de Helmholtz	196

Capítulo 1

Introducción

1.1. Antecedentes que motivan esta tesis

1.1.1. Audición espacial, localización y el sistema de coordenadas referido a la cabeza



RESCINDIENDO de la vista y utilizando únicamente el oído, el ser humano es capaz de juzgar la posición del origen de un sonido emitido a su alrededor, así como juzgar las características del espacio en el que está. Esta habilidad es parte de una habilidad más general denominada *audición espacial*: “la capacidad del sistema auditivo para interpretar o explotar diferentes caminos espaciales por los cuales los sonidos pueden llegar a la cabeza” [1, p. 1]. La audición espacial engloba (al menos) tres tareas efectuadas por el sistema auditivo: (1) inferir la dirección al punto de origen de un sonido (localización direccional), (2) inferir la distancia al punto de origen de un sonido (estimación de distancia), y (3) inferir características físicas del entorno donde se percibió el sonido (p.ej. tamaño y material de la habitación en la que se está). En particular, la localización direccional¹ ha tenido una importancia capital para la supervivencia del ser humano, ya sea miles de años atrás cuando el reconocimiento y la localización de un sonido emitido por un depredador (fuera del campo visual) significaba la vida o la muerte, o más recientemente, antes del desarrollo de las radiocomunicaciones, cuando el método de comunicación a larga distancia era a través del sonido (señalización sonora o megafonía). Los instrumentos sonoros que se utilizaban entonces, requerían de grandes cantidades de energía para producir sonidos intensos, capaces de escucharse a grandes distancias². Tim Hecker [2], relata como a finales del siglo XIX los marineros tenían técnicas de escucha sofisticadas y enfocadas en la localización de sonidos producidos

¹De ahora en adelante se usará únicamente el término “localización” para hacer referencia a la habilidad de localización direccional.

²Tim Hecker [2] dedica su tesis doctoral en filosofía al análisis de la ambición (y en algunos casos necesidad) de occidente, por producir sonidos colosales. Su trabajo abarca el periodo que comienza en 1880 con: 1. el uso de la megafonía para la orientación de la navegación marítima (y el oscuro fenómeno de las “zonas del silencio”) y 2. el interés por los órganos gigantes (*monster pipe organs*); y termina, paralelamente, en 1930 con: a) los efectos psicológicos y letales de las ondas de *shock* causadas por la tecnología bélica, y b) la construcción del órgano más grande del mundo: el *Boardwalk Hall Auditorium* con al menos 33,113 tubos, donde el más grave produce una frecuencia de 8 Hz, pesa más de 1.5 toneladas y mide aproximadamente 19.5 metros de alto. Cuando el órgano se tocó por primera vez, la construcción se sacudió, ladrillos cayeron del techo y partes de la estructura resultaron dañadas, el sonido producido por tal tubo era descrito como “un helicóptero rondando en el edificio” [2, p. 99].

por instrumentos sónicos, como cañones artilleros, bocinas de niebla (*fog horns*) o campanas marítimas. Cuando la visión era reducida o nula (noche, niebla, tormentas etc.), se accionaban tales instrumentos, ya sea desde las costas o por los mismos barcos. La localización era crucial para que el marinero pudiera orientarse, saber la dirección a la costa, los barcos cercanos o la presencia de obstáculos rocosos. Se trataba de una técnica que “...requería de un oído sintonizado a los sonidos vagos o ahogados en medio de la cornucopia de los ruidos marinos. Era una situación en la que el fracaso significaba una muerte segura” [2, p. 115]. La localización aún sigue siendo crucial para la supervivencia humana, actualmente la utilizamos para localizar alarmas, como el claxon de un vehículo, las sirenas de una ambulancia, bomberos o policía, un llamado de auxilio, o localizar el lugar de procedencia de detonaciones de armas de fuego o explosiones. La localización también juega un papel importante en habilidades humanas más refinadas como focalizar la atención a una única fuente de sonido a voluntad, mientras se discriminan otras fuentes presentes³ o la habilidad de volver inteligible una voz en escenarios con reverberación o eco [3, Cap. 5]. Esta habilidad está en un constante re-aprendizaje pues puede adaptarse (con entrenamiento) a cambios súbitos y radicales como modificaciones en la forma de la oreja [4], además, la pérdida visual severa conduce a una mejora en esta habilidad [5].

El ser humano puede realizar la localización debido a que el sistema nervioso central auditivo es capaz de relacionar una serie de indicios o pistas⁴ acústicas, con la dirección al origen de la fuente. Por ejemplo, un sonido emitido a la izquierda de una persona llegará primero al oído izquierdo que al derecho, creando así una diferencia de tiempo *interaural*⁵ (DTI), en este mismo escenario la cabeza crea una “sombra acústica”, de modo que el sonido del oído izquierdo también tendrá más intensidad que el sonido que llega al oído derecho, creando una diferencia de intensidad interaural (DII), aunado a lo anterior, la interacción de las ondas sonoras con la forma exterior del cuerpo (principalmente la forma particular de la oreja, la cabeza y el torso) alteran el *espectro de Fourier* de un sonido en función de su punto de emisión y las características del entorno, creando así pistas espectrales o *monaurales* [1]. De este modo el sistema nervioso central auditivo es capaz de asociar determinadas DTIs, DIIs y patrones espectrales con una dirección determinada en el espacio.

Una herramienta matemática esencial para el estudio de la audición en espacial, es el *sistema de coordenadas referido a la cabeza (o SCRC)* [6, Cap. 1], donde se considera la cabeza humana en el origen de $\mathbb{R}^3$, mirando en la dirección $\hat{j} = (0, 1, 0)$, donde el eje x (llamado eje interaural) atraviesa ambas cavidades auditivas y el eje y atraviesa la punta de la nariz. Un punto P se identifica con las coordenadas cartesianas usuales, $P = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ o bien coordenadas esféricas: $P = (\rho_0, \theta_0, \phi_0) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times [0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ⁶, donde

1. ρ_0 es la distancia del origen al punto P (usualmente las unidades son metros),
2. θ_0 (ángulo horizontal o acimut) es el ángulo en el plano XY que parte del eje y

³Este fenómeno se conoce como el “problema de la fiesta de coctel” y se puede resumir en la siguiente pregunta: ¿cómo es que en una conversación en una fiesta (o en cualquier lugar público lleno de voces distintas en todas direcciones), dos interlocutores pueden focalizar su atención mutuamente a sus respectivas voces cuando hay muchas otras similares “interfiriendo” a su alrededor?

⁴Se utiliza el término “pista” para la palabra inglesa “cue”, que también puede traducirse como “señal”, sin embargo se reserva este último término para usarlo en el contexto de la teoría de procesamiento de señales.

⁵Interaural: “situado entre o conectando las orejas” o “pertenciente o relativo a la recepción y percepción del sonido por cada oído considerado por separado” ([Merriam-Webster en línea](#)).

⁶Para cualquier $a \in \mathbb{R}$, se define $\mathbb{R}_{\geq a} := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$.

positivo, y es tal que $\theta = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\theta = \pi$ y $\theta = \frac{3\pi}{2}$ corresponden a las direcciones $\hat{j}$ (frente), $\hat{i} = (1, 0, 0)$ (derecha), $-\hat{j}$ (atrás) y $-\hat{i}$ (izquierda) respectivamente,

3. ϕ_0 (ángulo de elevación) es el ángulo en el plano YZ que también parte del eje y positivo y es tal que $\phi = 0$, $\phi = \frac{\pi}{2}$ y $\phi = -\frac{\pi}{2}$ corresponden a las direcciones $\hat{i}$ (frente), $\hat{k} = (0, 0, 1)$ (arriba) y $-\hat{k}$ (abajo) respectivamente⁷.

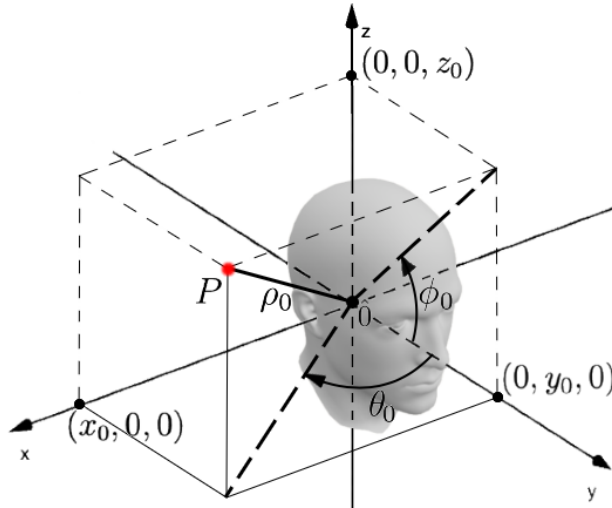


Figura 1.1: Sistema de coordenadas referido a la cabeza (SCRC) encontrado en [6, Fig. 1.4]. Edición sobre modelo de Vista Prime.

Respecto a la localización direccional, experimentos *psicoacústicos*⁸ realizados en cámaras anecoicas, donde se restringe por completo la visión de los participantes, muestran que la localización de un sonido emitido dentro del campo visual puede tener un error máximo de 3° para θ y 9° para ϕ , mientras que los sonidos emitidos fuera del campo visual pueden llegar a tener un error máximo de 12° para θ y 10.5° para ϕ [7, Cap. 1]. En general, los errores de localización son máximos cuando la altitud es extrema y para la mayoría de las direcciones el error no es mayor a 10° [8]. Aunado a lo anterior, el ser humano es capaz de detectar cambios en la posición θ de una fuente sonora tan pequeños como 1° y cambios en la posición ϕ tan pequeños como 2° [9]. La habilidad de estimación de distancia a una fuente sonora ha tenido menor atención por parte de la comunidad científica (en comparación con la localización direccional) [5], además de que el ser humano la realiza con mucho menor desempeño en comparación con la localización direccional [5, 8]. Aún se sigue investigando esta habilidad, y los conocimientos sobre la localización direccional pueden llegar a ser de gran utilidad para su estudio [10]. La habilidad de estimación de las características físicas del entorno nuevamente ha tenido menor atención, aunque esto ha cambiado en las últimas décadas debido al surgimiento de tecnologías de realidad virtual [11], concretamente se ha buscado estudiar la capacidad humana de estimar las dimensiones de un cuarto [11–13].

La audición espacial es una de las numerosas actividades fisiológicas que pasan desapercibidas de manera consciente, y se practican involuntariamente día a día, no en vano gran parte del procesamiento de las pistas de la localización ocurren en el tronco encefálico [14] (que forma parte del sistema nervioso autónomo). Toda audición es espacial,

⁷Existen otras convenciones para el SCRC, en este caso se toma en cuenta la usada por Jens Blauert [6].

⁸Se entiende por psicoacústica a la disciplina que estudia las relaciones entre las características físicas de un estímulo sonoro y la respuesta de carácter subjetivo del sujeto que recibe el estímulo.

toda fuente sonora tiene una posición determinada en el espacio (dejando de lado casos como el *acoasma* o el *tinnitus*), en otras palabras, como sostiene Jens Blauert: “no hay una «audición no espacial»” [6, p. 3].

El estudio de la audición espacial requiere del trabajo y cooperación de diversas disciplinas como biología, fisiología, física, ingeniería, matemática y neurociencia (por mencionar algunas).

1.1.2. Auralización en la música y filtros acústicos HRTF

Las habilidades descritas en §1.1.1, suponen una fuente sonora y receptor estáticos, sin embargo, en el contexto de la audición espacial también es válido preguntarse por las habilidades humanas de identificar la trayectoria una fuente sonora en movimiento rectilíneo uniforme (MRU), o una fuente sonora estática mientras el sujeto se encuentra en MRU, o ambos en MRU. La cuestión se puede complicar aún más, si se piensa en la habilidad humana de identificar movimientos arbitrarios de una fuente y el reconocimiento de las trayectorias que esta describe, además de la posibilidad de reconocer cambios en la propia fuente en movimiento, para finalmente pensar en combinaciones de todo lo anterior con múltiples fuentes de sonido (audición espacial dinámica, es decir, con capas de sonido múltiples, en movimiento y cambiantes).

Si fuese posible simular con precisión y de manera eficiente los estímulos asociados a la audición espacial⁹ se le podría proporcionar al artista sonoro la posibilidad de enriquecer sus obras añadiendo una dimensión estética más, asociada al espacio, distancia, movimiento y dirección del sonido; en otras palabras, se le podría dar al artista la posibilidad de hacer una coreografía de sonidos¹⁰ en el llamado “espacio virtual auditivo” (o acústico) [7, Cap. 1] (VAS por sus siglas en inglés). Actualmente existen programas que buscan simular aspectos concretos de la audición espacial¹¹, sin embargo estos son escasos, caros (tanto en el sentido computacional como económico) o poco efectivos. Aún se siguen buscando métodos eficientes para emular la audición espacial.

El recurso de aprovechar la posición física de cada elemento musical data (al menos) de 1566 con la obra *Missa sopra Ecco sì beato giorno* de Alessandro Striggio, donde se usa una disposición circular o semicircular de 40 a 60 coristas (divididos en 5 grupos) con el conjunto de instrumentos musicales al centro. La pieza explota la posición particular de cada grupo en el espacio [15, Sec. 5]. Un ejemplo más familiar y actual de este recurso es la propia disposición de los instrumentos de una orquesta sinfónica en una sala de conciertos. Respecto a la búsqueda de simular los estímulos de la audición espacial, John Chowning ya buscó simular específicamente un espacio virtual auditivo en su obra *Turenas*, que usa la disposición de cuatro altavoces en cada esquina de un cuadrado que encierra al receptor de la pieza. Chowning expone sus métodos en el artículo de 1977 *The simulation of moving sound sources* [16].

El problema de simular los estímulos de la audición espacial es parte de un campo de estudio más amplio denominado *auralización*: “la técnica para crear archivos de sonido

⁹Se piensa concretamente a través de audífonos, sin embargo es posible extrapolar la teoría a un arreglo de altavoces o cualquier otra tecnología de reproducción de audio disponible.

¹⁰Es necesario aclarar que esta “coreografía de sonidos” se plantea dentro de los límites permitidos y determinados por la audición espacial misma, ya que los resultados de los experimentos que estudian la habilidad humana de la estimación de distancia sugieren que “el espacio auditivo percibido es una representación distorsionada o sesgada del espacio auditivo físico” [8, p. 410].

¹¹La música procesada por estos programas se conoce popularmente como *música 8D*.

audibles a partir de datos numéricos (simulados, medidos, sintetizados)” [17, p. X], y donde se toman cuenta factores como: “tipo de generación de sonido, dirección del evento, movimiento de la fuente, movimiento del oyente y ambiente exterior o interior (tipo, forma y tamaño)” [17, p. X]. Dentro de este campo se encuentran los filtros acústicos HRTF.

Filtros acústicos HRTF

Con el surgimiento de tecnologías de audio, se ha buscado simular los estímulos de la localización directamente en los oídos a través del uso de audífonos, similarmente se ha buscado diseñar dispositivos que simulen esta facultad humana, es decir, dispositivos capaces de identificar la dirección a la fuente de un sonido registrado. El recurso principal que se utiliza en la actualidad para simular los estímulos de la localización es la *función de transferencia acústica referida a la cabeza* o HRTF del inglés *head related transfer function*. En términos prácticos, un HRTF es un “filtro acústico que modifica al sonido, y cuyos rasgos espectrales permiten al cerebro interpretar la dirección de procedencia del sonido” [18, p. 9]. Concretamente, las HRTFs son *funciones de transferencia* asociadas a la *respuesta al impulso* (RI) del siguiente escenario.

Proceso de obtención de HRTFs (medición directa (o empírica) de HRTFs). El hilo conductor, y gran parte de la motivación general de esta tesis, es una curiosidad por la matemática subyacente al escenario de la captura de HRTFs, el cual se describe llanamente a continuación: en una cámara anecoica, una persona se encuentra en una posición fija con un micrófono colocado en cada entrada de su canal auditivo. Un altavoz cercano emite un *impulso*, de modo que ambos micrófonos capturan la *respuesta al impulso*, del sistema que consiste en “la ruta de propagación del sonido desde la fuente de sonido en una dirección determinada hasta la entrada del canal auditivo del sujeto” [19, p. 160]. Esta configuración se basa en el SCRC. Se asume tener una posición particular del altavoz, por ejemplo, $P_0 = (2.5 \text{ m}, \frac{\pi}{2}, 0)$, así como las respuestas al impulso (RIs) del micrófono izquierdo $K_L^{P_0} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ y derecho $K_R^{P_0} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ asociadas a la posición P_0 . Se puede tomar una señal arbitraria de audio $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ y hacer el *producto convolución* con las RIs (se debe advertir que estas RIs requieren un tratamiento previo de “ecualización” [20]), para construir la señal estéreo

$$f^{P_0} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}^2, \quad f^{P_0}(t) = ((K_L^{P_0} * f)(t), (K_R^{P_0} * f)(t)). \quad (1.1)$$

De esta manera, la audición con auriculares de la señal $f^{P_0}(t)$ (es decir, $K_L^{P_0} * f$ se escucha en el oído izquierdo y $K_R^{P_0} * f$ en el derecho) por la misma persona, resulta en la percepción de escuchar $f(t)$ como si ésta fuese emitida a la altura de la cabeza, 45° a la derecha y a 2.5 metros de distancia, es decir, la audición de $f^{P_0}(t)$ crea la ilusión (auditiva) de escuchar $f(t)$ emitida desde el punto P_0 [21]. El estímulo generado por una HRTF puede ser tan realista, que puede llegar a ser indistinguible del escenario real [22] y [23, Sec. 22.3].

Observaciones importantes respecto a la medición directa de HRTFs

1. Las HRTFs son personalizadas, pues las RIs dependen de la interacción de las ondas sonoras con la anatomía (particular para cada persona) de las orejas, cabeza y

torso, por ende, la efectividad de una HRTF en una persona aleatoria puede ser deficiente si ésta presenta pocas similitudes anatómicas con el sujeto de prueba original (al que le fue capturada la RI) [24].

2. Para cada distancia y dirección, existe una HRTF compuesta de dos RIs (o dos funciones de transferencia). En la práctica se toma un valor fijo para una esfera concreta ($\rho = \rho_0$) y se hace una partición de ella tomando valores regulares para θ y ϕ del SCRC. Por ejemplo, en 1986 Pösselt y colegas [21] reportan la medición utilizando la esfera $\rho_0 = 2.5$ m y la partición que resulta de saltos regulares de 5° para ángulo horizontal, 10° para la elevación, donde en esta última solamente se toma un rango de -10° a 80° . Esta configuración da lugar a 1442 RIs por persona.

3. La medición directa de HRTFs es tediosa y requiere de una gran cantidad de tiempo y recursos: cámara anecoica, equipo especializado para la captura, cooperación del sujeto de pruebas para permanecer inmóvil durante todo el proceso de captura (que puede llegar a durar hasta hora y media por persona [19]). Por lo anterior, en las últimas décadas se han buscado formas para construir, derivar o personalizar HRTFs de una manera más eficiente. Respecto a este último tema, Torres [18, Sec. 2.5] provee de una clasificación sistemática de los distintos métodos de personalización y generación de HRTFs, a grandes rázagos, tales métodos se pueden clasificar en cuatro familias:

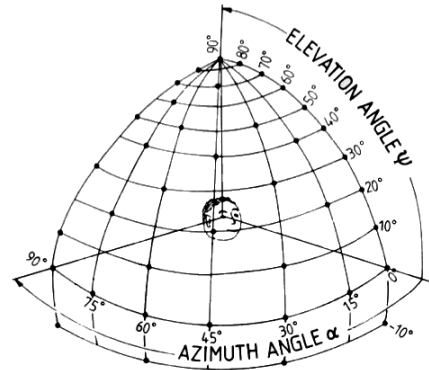


Figura 1.2: SCRC y partición de la esfera $\rho = 2.5$ m con puntos desde donde se emitieron impulsos para capturar las RIs asociadas al HRTF. Imagen de [21, Fig. 2].

- (a) *Métodos de post-procesamiento y adecuación.* En estos métodos se tiene de antemano alguna base de datos¹² de HRTFs, y se realiza algún post-procesamiento de esta para poder adecuar un conjunto de una HRTFs a una persona particular, o bien se recurre a criterios o tests para elegir los HRTFs idóneos.
- (b) *Modelos físicos o matemáticos.* Se recurren a modelos que buscan emular el efecto de las HRTF “desde cero” (sin la ayuda de la medición empírica de HRTFs en cámaras anecóicas).
- (c) *Antropometría.* Consiste en personalizar las HRTFs utilizando datos antropométricos del sujeto. El ya citado trabajo de Torres cae en esta categoría y consiste en medir HRTFs a partir de fotografías del oído (fotoantropometría automatizada) [18].
- (d) *Redes neuronales.* En los últimos años también se ha recurrido al uso de redes neuronales (entrenadas a partir de una base de datos de HRTFs) para generar nuevas HRTFs personalizadas [25–27].

¹²Existen bases de datos (bibliotecas) que contienen HRTFs de varios sujetos de prueba, en [18, p.10] se mencionan bibliotecas relevantes de HRTFs hasta el año 2014. Fuentes donde se mencionan bibliotecas más recientes son [26, 28, 29].

1.1.3. Teoría del control y sistemas lineales e invariantes en el tiempo (sistemas LIT)

La teoría del control es una rama de las matemáticas aplicadas que trata “los principios básicos que subyacen al análisis y diseño de sistemas de control. Controlar un objeto significa influir en su comportamiento para lograr un objetivo deseado” [30, p. 1]. A su vez, un sistema de control se puede ver como el caso particular de un sistema dinámico

...cuyas leyes dinámicas no están del todo fijas ya que son problema de la física clásica, pero dependen de parámetros, llamados controles, que pueden variar y con los cuales uno puede controlar el comportamiento del sistema; el desafío principal es entender los efectos de los controles en el sistema dinámico. [31, pp. 20-21].

Dentro de esta teoría, se encuentra la teoría de los sistemas LIT. Tomando (por ahora) la definición de sistema (como caja negra) dada por Oppenheim: “un sistema puede ser visto como un proceso en el que señales de entrada son transformadas por el sistema o hacen que el sistema responda de alguna forma, resultando en otras señales de salida” [32, p. 38]. Si $\bar{\lambda} : \mathcal{U}^{\mathcal{T}} \rightarrow \mathcal{Y}^{\mathcal{T}}$ ¹³, es la función que caracteriza el sistema, donde $\mathcal{U}$ es el conjunto de entradas $\mathcal{Y}$ el de salidas (con $\mathcal{U} = \mathbb{R}^m$ y $\mathcal{Y} = \mathbb{R}^p$ para algunos $p, m \in \mathbb{N}$) y $\mathcal{T}$ es el conjunto de tiempo (subgrupo de $(\mathbb{R}, +)$ con la suma usual). El sistema $\bar{\lambda}$ es lineal si

$$\bar{\lambda}(\alpha u + \beta v) = \alpha \bar{\lambda}(u) + \beta \bar{\lambda}(v) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall u, v \in \mathcal{U}^{\mathcal{T}} \quad (1.2)$$

por otra parte, $\bar{\lambda}$ es invariante al tiempo si

$$\bar{\lambda}(u(t - \tau)) = \bar{\lambda}(u(t)) \quad \forall \tau \in \mathcal{T}, \forall u \in \mathcal{U}^{\mathcal{T}}. \quad (1.3)$$

En la literatura referente a este tema, se menciona que un sistema $\bar{\lambda}$ es LIT, cuando cumple precisamente (1.2) y (1.3), y posteriormente se menciona que estos sistemas tienen la propiedad especial de que

...pueden describirse con respecto a su reacción [función $\bar{\lambda}$] a señales en el dominio del tiempo y en el dominio de la frecuencia. Esta reacción está representada de manera única por la respuesta al impulso (en el dominio del tiempo) o la función de transferencia estacionaria (en el dominio de la frecuencia) [17, p. 103].

Si K es la RI del sistema $\bar{\lambda}$, entonces K caracteriza $\bar{\lambda}$ por completo a través del producto de convolución de la RI con cualquier entrada $u \in \mathcal{U}^{\mathcal{T}}$, es decir

$$\bar{\lambda}(u) = K * u \quad \forall u \in \mathcal{U}^{\mathcal{T}}. \quad (1.4)$$

El resultado en (1.4) es la teoría en la que se apoya el método de medición directa de HRTFs, y explica la razón de ser de la función f^{P_0} en (1.1).

Alan Pierce [33], explica como los sistemas lineales ayudan a simplificar muchos problemas en las ciencias, pues una entrada $u \in \mathcal{U}^{\mathcal{T}}$, se puede interpretar como una “causa”, y la evaluación $\bar{\lambda}(u) \in \mathcal{Y}^{\mathcal{T}}$ (la función de salida) se interpreta como el “efecto” asociado a

¹³En general, para dos conjuntos X y Y , se conviene la notación $Y^X := \{f \subseteq X \times Y \mid f \text{ es función}\}$, esta notación se usará frecuentemente durante toda esta tesis.

¹⁴Esta propiedad también se conoce como “principio de superposición”.

tal causa, de este modo, el hecho de que $\bar{\lambda}$ sea lineal significa que “al duplicar una causa se duplica el efecto, y el efecto de una suma de dos causas es la suma de los efectos de cada una de las causas separadas” [33, p. 27]. Para el caso en que $\bar{\lambda}$ es invariante en el tiempo, esto significa que no importa en qué momento se aplique la causa, el efecto siempre será el mismo.

En todas las ramas de la matemática, nunca se comienza con un sistema axiomático “ideal”, del cual se siguen todas las proposiciones y teoremas de manera natural y fluida. Por el contrario, antes de llegar a una madurez axiomática, con definiciones precisas y efectivas, primero interviene: “la imaginación, la intuición, la experimentación, las conjeturas sensatas, el tanteo, las analogías, incluso las más vagas, los tropiezos y los titubeos” [34, p. 58]. Se menciona esto último, debido a que en sus orígenes, la teoría del control no tuvo una unidad conceptual ni definiciones precisas, lo cual derivó en confusión y el surgimiento de dos teorías aparentemente distintas. Rudolf Kalman señaló este problema en el artículo *Mathematical description of linear dynamical systems* [35], vale la pena reproducir lo que comenta al respecto.

Los desarrollos recientes en la teoría de sistemas de control óptimo se basan en ecuaciones diferenciales vectoriales como modelos de sistemas físicos. Sin embargo, en la literatura más antigua sobre teoría del control, los mismos sistemas se modelan mediante funciones de transferencia (es decir, mediante las transformadas de Laplace de las ecuaciones diferenciales que relacionan las entradas con las salidas). Han surgido dos lenguajes diferentes que pretenden hablar del mismo problema. En el nuevo enfoque, hablamos de variables de estado, ecuaciones de transición, etc., y hacemos uso constante del álgebra lineal abstracta. En el antiguo enfoque, las palabras clave son respuesta de frecuencia, patrones de polos y ceros, etc., y la principal herramienta matemática es la teoría de funciones complejas. ¿Existe realmente una diferencia entre lo nuevo y lo viejo? ¿Cuáles son exactamente las relaciones entre las ecuaciones diferenciales vectoriales (lineales) y las funciones de transferencia? En la literatura, esta cuestión está rodeada de confusión. Esto es malo. Se impide la comunicación entre investigadores e ingenieros. Los resultados importantes de la ‘vieja teoría’ aún no están plenamente integrados en la nueva teoría [35, p. 152].

En el artículo de 1963, Kalman propone un sistema axiomático para la teoría del control, buscando consolidar ambos enfoques. Dando un salto más cercano al presente, Eduardo Sontag (estudiante doctoral de Kalman) publica en 1990 la obra *Mathematical Control Theory* [30], que tiene entre sus objetivos “...lograr unidad conceptual en el campo, así como desarrollar una mejor capacitación para los estudiantes y profesores de los departamentos de matemáticas interesados en estar expuestos al área” [30, p. xi].

1.2. Planteamiento del problema

Desde el punto de vista que le compete a esta tesis, el interés principal está en la teoría matemática sobre la que se apoyan el estudio de la audición espacial y la auralización. Precisando, (como se mencionó en §1.1.2), el interés está en la matemática subyacente al escenario de la captura de HRTFs, donde se mencionan términos como: sistema, función de transferencia, impulso, respuesta al impulso y convolución, por lo que una pregunta inmediata es:

(i) *¿cuáles son las definiciones matemáticas de estos términos?*

Por su parte, en referencia a todo lo mencionado en §1.1.3

(ii) *¿por qué todo sistema LTI tiene asociada una RI única?*

y en cuanto a la igualdad en (1.4)

(iii) *¿por qué en un sistema LIT, la convolución de su respuesta al impulso con cualquier entrada caracteriza por completo el comportamiento del sistema?,*

(iv) *¿cómo es que partiendo de (1.2) y (1.3) se deduce (1.4)?, ¿en verdad basta con estas dos hipótesis, o se necesitan hipótesis adicionales?,*

(v) *¿cuál es la importancia y el papel de la función de transferencia en todo esto?*

Ahora bien, para el caso particular de los filtros HRTF, se está aplicando la teoría de sistemas LIT al fenómeno físico del sonido y el procesamiento digital de señales acústicas, por lo que la siguiente pregunta es:

(vi) *¿cómo se justifica el poder aplicar la teoría de sistemas LIT al fenómeno físico del sonido, y en especial al caso particular de la captura de HRTFs?*

Por otra parte, llama la atención la singularidad de los filtros HRTF frente a otros filtros acústicos, pues se trata de un filtro que relaciona estrechamente tres grandes “sistemas”:

- $$\left\{ \begin{array}{l} 1. \text{ el sistema (físico) de la propagación del sonido,} \\ 2. \text{ el sistema (informático) del procesamiento digital de señales acústicas y,} \\ 3. \text{ el sistema (fisiológico) auditivo humano y la habilidad de audición espacial,} \end{array} \right. \quad (1.5)$$

ante este hecho, surge la inquietud:

(vii) *¿cómo representar matemáticamente las relaciones entre los tres “sistemas” que el filtro HRTF ofrece?*

Finalmente, en relación a la pregunta (vii), se subraya como las HRTFs medidas de forma directa, cumplen exitosamente con simular los estímulos de la localización, prescindiendo totalmente del conocimiento del funcionamiento del oído y las pistas de la localización. En contraste a este último hecho, es natural preguntarse: ¿qué ocurre dentro de esta *caja negra*?, es decir, las últimas preguntas que se plantean son:

(viii) *¿cómo es que el sistema auditivo reconoce las pistas de la localización (DIIs, DTIs y pistas monaurales)?,*

(ix) *¿qué aspectos se deben tener en cuenta si se desea modelar un HRTF “desde cero”?*

1.3. Justificación

Desde el punto de vista matemático, la teoría de sistemas LIT en el contexto de la teoría del control, requiere (principalmente) de teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias, análisis matemático real y complejo, y álgebra lineal. Esta tesis puede ser un acercamiento

a los conceptos básicos de esta rama, especialmente se buscan esclarecer las relaciones matemáticas entre los conceptos: sistema, caja negra, respuesta al impulso, impulso, convolución y función de transferencia.

Desde el punto de vista práctico, la teoría del control es aplicable a campos tan diversos como: economía, administración, automóviles, biología, recuperación de petróleo, fisiología, control de procesos químicos, biomedicina, psicología, robótica y procesamiento de señales [30, p. 494].

Por otra parte, el interés por el estudio de HRTFs ha incrementado en las últimas décadas debido a su relevancia y aplicación en áreas como: ensayos clínicos auditivos de bajo costo [21], dispositivos de localización sonora [36–39], videojuegos [40], sistemas de sonido envolvente [41], composición musical electrónica y electroacústica [42–44], sistemas de alerta en medios de transporte [46–48], sistemas de orientación y mejoramiento de desempeño para pilotos de aeronaves militares [49], y mejoramiento de la calidad acústica en sistemas de comunicación móvil [50, 51].

En un sentido más general, la simulación exitosa de los estímulos asociados a la audición espacial, se traduce en un eficiente espacio virtual auditivo, con aplicaciones fructíferas como: estudios psicofísicos o psicológicos, entrenamiento y educación, terapia, diseño arquitectónico acústico y teleconferencias [7, Cap. 6].

La audición espacial también es de interés para la medicina y la neurociencia, en el desarrollo de dispositivos de ayuda auditiva e implantes cocleares [52], en el entendimiento del proceso de audición a nivel de la corteza cerebral y de “cómo el mundo externo es internamente representado en la gente ciega” [5, p. 374].

Finalmente, la audición espacial también es de interés para la audición robótica: en robots de exploración remota [7, Cap. 6], vehículos aéreos no tripulados (UAVs) [53], y en el área de procesamiento de señales llamada “análisis de escenas auditivas” [52] y [23, Cap. 22].

1.4. Objetivos, alcances y contenido

Teniendo en cuenta lo mencionado en §1.2, en el **Capítulo 2** se busca responder a las preguntas (i-v). Este capítulo tendrá el mayor peso teórico en comparación con los otros. En el **Capítulo 3**, se busca responder a la pregunta (vi) y parte de la pregunta (vii). La pregunta (vii) exige un conocimiento de los tres sistemas mencionados en (1.5), si bien es muy ingenuo abordar a fondo estos tres campos en esta tesis, lo que se pretende realizar en los **Capítulos 4 y 5**, es una exposición sobre el proceso de audición humana, lo suficientemente profunda como para proponer respuestas a las preguntas (vii - ix). De manera más específica, en el **Capítulo 4** se expondrá el proceso de audición humana (para los primeros tres sectores auditivos), con dos objetivos:

1. dar una introducción a los conceptos de *machine hearing* e “imagen auditiva” de Richard Lyon¹⁵, con el objetivo de exhibir como es posible aplicar conceptos de teoría de sistemas LIT al proceso de audición, y
2. allanar el camino para (en el Capítulo 5), dar respuesta a las preguntas (viii) y (ix). Y finalmente (para no dejar todo en la teoría), justificar la construcción de una apli-

¹⁵Conceptos pertenecientes a la obra *Human and Machine Hearing: Extracting Meaning From Sound* (2017) [23], donde Lyon busca dar aportes teóricos y prácticos al campo de la audición robótica y el análisis de escenas auditivas.

cación hecha en MAXMSP, que busca simular el comportamiento de HRTFs para el plano horizontal.

Este trabajo tendrá 2 apéndices, el **Apéndice A** es de importancia capital y no debe verse como un material extra del que se puede prescindir, pues a él se traslada la mayoría de las demostraciones de esta tesis, la razón de esto es hacer más ágil la lectura de cada capítulo y no alargarlo (especialmente el Cap. 2). La navegación entre proposiciones y demostraciones se agiliza mediante **hiperenlaces**. Por otra parte, en el **Apéndice B** (con base en la obra de Lyon [23, Cap. 2] y Cheveigné [54, Cap. 6]) se da una breve exposición de las dos posturas más influyentes respecto a las teorías de audición que surgieron durante la segunda mitad del siglo XIX.

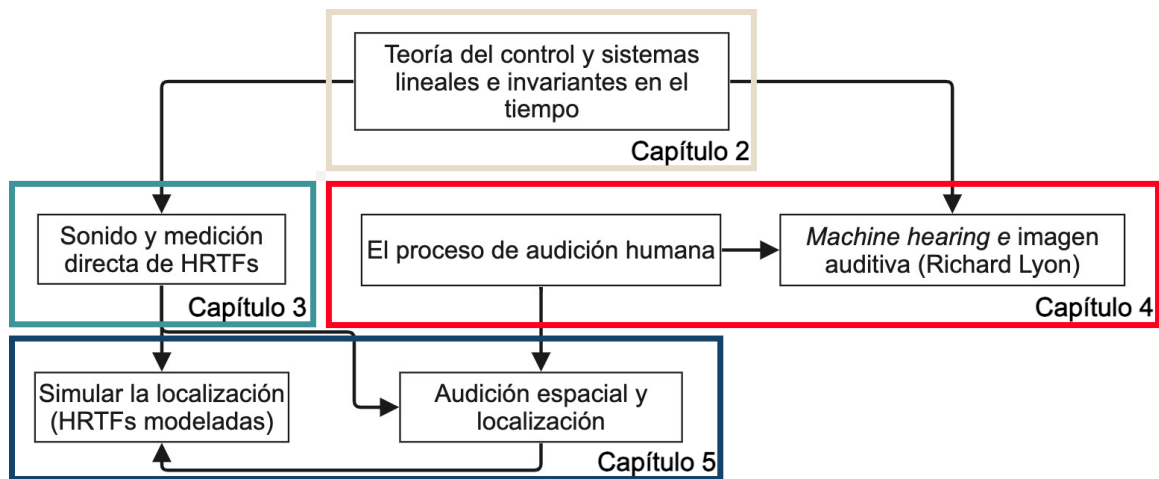


Figura 1.3: Cuadro conceptual de temas que se pretenden abordar en esta tesis, sus respectivos capítulos y relaciones inmediatas señaladas con flechas.

Sobre la bibliografía utilizada y observaciones importantes

Se remarca la importancia de la obra *Análisis Matemático* [55] de Mónica Clapp, pues se mencionan muchos de los resultados y definiciones encontrados en dicha obra. También, el trabajo citado: *Mathematical Theory of Control - Deterministic Finite Dimensional Systems* [30] de Eduardo Sontag será el apoyo principal para exponer la teoría del control y los sistemas LIT. Por último, la obra *Fourier Analysis and Applications: Filtering, Numerical Computation, Wavelets* [56] de Claude Gasquet y Patrick Witomski, será el principal apoyo para relacionar la teoría de los sistemas LIT con el análisis de Fourier y el concepto de muestreo.

Para abordar el proceso fisiológico de la audición, el apoyo principal está en las obras *Fundamentals of Hearing* [57], de William Yost, *Auditory Neuroscience: Making Sense of Sound* [3] de Schnupp, Nelken y King, y la obra citada de Lyon [23].

Al terminar un Lema, Proposición o Teorema, se cita la fuente donde se puede encontrar el enunciado y su respectiva prueba. También se procura citar definiciones de esta forma para mostrar su procedencia. En caso de que se citen ejercicios o resultados sin demostrar en la bibliografía, estos se demuestran en el Apéndice A.

Capítulo 2

Teoría del control y sistemas lineales e invariantes en el tiempo (de dimensión finita)

2.1. Preliminares



A primera sección de este capítulo presenta resultados sobre teoría de integración y teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) lineales, los cuales son imprescindibles para la teoría del control y los sistemas LIT. Esta sección se apoya en [30, 55, 58–66].

2.1.1. Teoría de integración

Dado (Y, τ) espacio topológico, $\mathcal{B}_Y$ denota la menor σ -álgebra que contiene la topología τ , denominada σ -álgebra de Borel. En el caso en que $Y = \mathbb{R}$, a partir de $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ se construye m , la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$ cuyo dominio es la σ -álgebra de Lebesgue en $\mathbb{R}$ (cuyos elementos son los conjuntos Lebesgue medibles), y a partir de esta última se generaliza a $\mathbb{R}^n$, con la σ -álgebra generada por productos cartesianos de conjuntos medibles en $\mathbb{R}$ [58, Prop. 1.5].

Un conjunto $O \subset \mathbb{R}^n$ tiene **medida cero, o es nulo** ($m(O) = 0$) si para cada $\varepsilon > 0$ existe una familia numerable de bolas $\{B_{\mathbb{R}^n}^i(x_i, \varepsilon_i) \subset \mathbb{R}^n \mid i \in \mathbb{N}\}$ de volumen ε_i tales que $\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i < \varepsilon$ y $O \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} B_{\mathbb{R}^n}^i(x_i, \varepsilon_i)$ ¹ [30, p.467]. Estos conjuntos juegan un papel crucial en la teoría por lo siguiente: si $P(x)$ es una propiedad que depende de $x \in X \subseteq \mathbb{R}^n$, se dice que $P(x)$ se cumple **casi dondequiera (c.d.)** en X , o $P(x)$ se cumple **para casi todo (p.c.t.)** $x \in X$, si $m(\{x \in X \mid \neg P(x)\}) = 0$. Esto permite relajar el cumplimiento de propiedades en todo elemento de un subconjunto (medible) de $\mathbb{R}^n$, a propiedades cumplidas en todo elemento salvo un conjunto nulo.

Un espacio métrico $(\mathcal{U}, d)$ es un espacio medible $(\mathcal{U}, \mathcal{B}_{\mathcal{U}})$ donde $\mathcal{B}_{\mathcal{U}}$ está generada por la topología inducida por la métrica d . En este caso se dice que una función $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{U}$ con $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ es **medible** si existe una sucesión de funciones (f_i) con $f_i : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{U}$, constantes por partes, tales que $f_i(x) \rightarrow f(x)$ p.c.t. $x \in \mathcal{X}$ [30, p. 468]. Un caso de interés será el siguiente.

¹ $B_{\mathbb{R}^n}(x_0, \varepsilon) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| < \varepsilon\}$ [55, Def. 3.9].

Proposición 2.1.1. Sean S un espacio métrico separable e $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ un intervalo. Una función $f : \mathcal{I} \rightarrow S$, es medible si y solo si para todo $U \subset S$ abierto se tiene que $f^{-1}(U)$ es medible en $\mathcal{I}$ [30, Obs. C.1.1]. $\lrcorner$

Por su parte, se tienen distintas caracterizaciones para una función medible con dominio y codominio real, en esta tesis se parte de la siguiente.

Definición 2.1.2. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ medible. $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ es medible si para todo $U \subset \mathbb{R}^m$ abierto se tiene que $f^{-1}(U)$ es medible en Ω [59, Def. 7.5.1]. $\lrcorner$

Lema 2.1.3. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ medible, y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ con $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$, entonces f es medible si y solo si $f_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es medible para todo $i \in \overline{m} := \{1, \dots, m\}$ ² [59, Ej. 7.5.2]. $\lrcorner$

Prueba. Ver Prop. A.1.2 en la página 149. $\square$

Esta última propiedad es útil, pues para saber si una función (con codominio en $\mathbb{R}^m$) es medible, basta ver que lo sea en todas sus variables/entradas y viceversa.

Lema 2.1.4. Sean $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $h, k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ medibles, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y $p \in (0, \infty)$, entonces

1. $\lambda f + \mu g$, $|h|$, $h^+ := \max\{h, 0\}$, $h^- := \min\{h, 0\}$, $\max\{h, k\}$, y $\min\{h, k\}$ son medibles [55, Prop. 14.11].
2. $|f|^p$ y fg son medibles [55, Prop. 14.13]. $\lrcorner$

Definición 2.1.5. Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y $\mathcal{U}$ un espacio métrico.

1. Una función $f : \Omega \rightarrow \mathcal{U}$ es **esencialmente acotada en Ω** si existe un compacto $K_{\mathcal{U}} \subset \mathcal{U}$ tal que $f(x) \in K_{\mathcal{U}}$ p.c.t. $x \in \Omega$. Si $\mathcal{U} = \mathbb{R}^m$, entonces f es esencialmente acotada en Ω si existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $\|f(x)\|$ ³ $< c$ p.c.t. $x \in \Omega$.
2. Una función $f : \Omega \rightarrow \mathcal{U}$ es **localmente esencialmente acotada en Ω** si para todo compacto $K_{\Omega} \subset \Omega$, $f|_{K_{\Omega}} : K_{\Omega} \rightarrow \mathcal{U}$ es esencialmente acotada en K_{Ω} . Si $\mathcal{U} = \mathbb{R}^m$, f es localmente esencialmente acotada en Ω si para todo compacto $K_{\Omega} \subset \Omega$ existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $\|f(x)\| < c$ p.c.t. $x \in K_{\Omega}$. $\lrcorner$

La construcción de los espacios $L^p(\Omega)$ (como se presenta en [55, Sec. 14.2]), es la siguiente: sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, al conjunto $\mathfrak{M}(\Omega) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es medible}\}$, se le asigna la relación $f \sim g \iff f(x) = g(x)$ p.c.t. $x \in \mathbb{R}^n$, que es una relación de equivalencia, donde se considera la **extensión trivial** de f en $\mathbb{R}^n$, es decir $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega$. A partir del conjunto de clases de equivalencia o partición $M(\Omega) := \mathfrak{M}(\Omega)/\sim$ se define lo siguiente.

Definición 2.1.6. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto. Si $p \in [1, \infty)$, se define

$$\begin{aligned} L^p(\Omega) &:= \{f \in M(\Omega) \mid |f|^p \text{ es integrable en } \Omega\} \\ L^\infty(\Omega) &:= \{f \in M(\Omega) \mid f \text{ es esencialmente acotada en } \Omega\} \end{aligned} \quad [55, \text{Def. 14.18, 14.19}]. \quad \lrcorner$$

²En toda la tesis se considera $\overline{n} := \{1, 2, \dots, n\} \subset \mathbb{N}$, $\overline{m} := \{1, 2, \dots, m\} \subset \mathbb{N}$ y $\overline{p} := \{1, 2, \dots, p\} \subset \mathbb{N}$.

³La norma que se toma para $\mathbb{R}^n$ es la euclidiana usual: $\|(x_1, x_2, \dots, x_n)\| := (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$.

$L^p(\Omega)$ es un espacio de Banach (espacio vectorial normado y completo) para todo $p \in [1, \infty]$ [55, Teo. 14.27], con las normas $\|f\|_p := \left(\int_{\Omega} |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ y $\|f\|_{\infty} := \inf\{c \in \mathbb{R} \mid |f(x)| \leq c \text{ p.c.t. } x \in \mathbb{R}^n\}$.

Los siguientes conjuntos serán de interés, y son un caso particular de la Def. 2.1.6.

Definición 2.1.7. Sea $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo, se define

$$\begin{aligned} L^1_{loc}(\mathcal{I}) &:= \{f \in M(\mathcal{I}) \mid |f| \text{ es localmente integrable en } \mathcal{I}\}, \text{ y} \\ L^{\infty}_{loc}(\mathcal{I}) &:= \{f \in M(\mathcal{I}) \mid f \text{ es localmente esencialmente acotada en } \mathcal{I}\} \end{aligned} \quad \lrcorner$$

Observación 2.1.8. Se tiene que $L^q_{loc}(\mathbb{R}) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R})$ para todo $q \in [1, \infty]$. Este resultado usa el hecho de que si $m(\mathcal{I}) < \infty$ y $1 \leq p \leq q \leq \infty$, entonces $L^q(\mathcal{I}) \subset L^p(\mathcal{I})$ [55, Prop. 14.31]. Pues si $f \in L^q_{loc}(\mathbb{R})$, $q \in [1, \infty]$, entonces para todo conjunto compacto $[a, b] \subset \mathbb{R}$ se tiene que $f|_{[a,b]} \in L^q([a, b]) \subset L^1([a, b])$, y por tanto $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. $\lrcorner$

Para funciones $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{U}$, donde $\mathcal{U}$ es un espacio métrico, de manera análoga se define $\mathfrak{M}(\mathcal{I}, \mathcal{U}) := \{f : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{U} \mid f \text{ es medible}\}$, conjunto al cual se le asigna la relación de equivalencia $f \sim g \iff f(t) = g(t) \text{ p.c.t. } t \in \mathbb{R}$ considerando la extensión trivial. Así se tiene el conjunto de clases de equivalencia $M(\mathcal{I}, \mathcal{U}) := \mathfrak{M}(\mathcal{I}, \mathcal{U}) / \sim$.

Definición 2.1.9. Sea $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y $\mathcal{U}$ un espacio métrico, se define

$$L^{\infty}_{loc}(\mathcal{I}, \mathcal{U}) := \{f \in M(\mathcal{I}, \mathcal{U}) \mid f \text{ es localmente esencialmente acotada}\}. \quad (2.1)$$

Observación 2.1.10. En (2.1) para el caso en que $\mathcal{U} = \mathbb{R}^m$, si $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}^m$ con $f(t) = (f_1(t), \dots, f_m(t))$, se tiene que $f \in L^{\infty}_{loc}(\mathcal{I}, \mathbb{R}^m)$ si y solo si $f_i \in L^{\infty}_{loc}(\mathcal{I})$ para cada $i \in \overline{m}$. Esto se verifica rápidamente, pues si f es esencialmente acotada en $K \subset \mathcal{I}$ compacto, entonces $|f_i(t)| \leq \|f(t)\| \leq c \text{ p.c.t. } t \in K$, y esto ocurre para toda $i \in \overline{m}$. Por otro lado si $|f_i(t)| < c_i \text{ p.c.t. } t \in K$ y toda $i \in \overline{m}$, entonces $\|f(t)\| = \left(\sum_{i=1}^m |f_i(t)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq m^{\frac{1}{p}} \max_{i \in \overline{m}} c_i$, por tanto, f también es esencialmente acotada en K . La equivalencia entre ser función medible y tener entradas/variables medibles la garantiza el Lema 2.1.3. $\lrcorner$

También se trabajará con el espacio normado $\|A\| := \max_{\{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x\|=1\}} \|Ax\|_{\mathbb{R}^n}$ para toda $A \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$ (conjunto de las matrices de n renglones y m columnas con entradas en $\mathbb{R}$). El espacio $(M_{n \times m}(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$ se puede identificar con el espacio $(\mathbb{R}^{nm}, \|\cdot\|_{\mathbb{R}^{nm}})$, más aún, se tiene el siguiente resultado.

Lema 2.1.11. Sean V y W espacios vectoriales normados sobre $\mathbb{R}$. Si $\dim(V) = \dim(W) < \infty$, entonces existe una equivalencia⁴ $\varphi : V \rightarrow W$ que es además un isomorfismo lineal [55, Ej. 4.42 (a)]. $\lrcorner$

Prueba. Ver Prop. A.1.5 en la página 151. $\square$

Por lo tanto $M_{n \times m}(\mathbb{R})$ es un espacio de Banach⁵, (pues $\mathbb{R}^{nm}$ es de Banach) [55, Prop. 5.7], también se tiene que $M_{n \times m}(\mathbb{R})$ es un espacio métrico separable, ya que $\varphi(\mathbb{Q}^{nm})$ es denso y numerable en $M_{n \times m}(\mathbb{R})$. Se convendrá usar la notación $\mathbb{R}^{n \times m} := M_{n \times m}(\mathbb{R})$.

⁴Función biyectiva que es Lipschitz continua y cuya inversa también es Lipschitz continua [55, Def. 3.6].

⁵De forma más inmediata, se puede asegurar que todo espacio vectorial normado de dimensión finita es de Banach [55, Teo. 5.8], sin embargo es de especial interés señalar que $M_{n \times m}(\mathbb{R})$ se puede identificar con $\mathbb{R}^{nm}$, más aún, se puede identificar con $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) := \{T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \mid T \text{ es lineal}\}$, esto último se usará más adelante.

Observación 2.1.12. Así como el caso de particular $L_{loc}^\infty(\mathcal{I}, \mathbb{R}^m)$ de (2.1), otro caso de interés será el conjunto $L_{loc}^\infty(\mathcal{I}, \mathbb{R}^{n \times m})$, que por lo mencionado hasta ahora, se puede identificar con el conjunto $L_{loc}^\infty(\mathcal{I}, \mathbb{R}^{nm})$, por lo que la Obs. 2.1.10 también aplica para $L_{loc}^\infty(\mathcal{I}, \mathbb{R}^{p \times m})$, es decir, $f = (f_{lj}) \in L_{loc}^\infty(\mathcal{I}, \mathbb{R}^{p \times m})$ si y solo si $f_{lj} \in L_{loc}^\infty(\mathcal{I})$ para cada $(l, j) \in \bar{p} \times \bar{m} = \{1, \dots, p\} \times \{1, \dots, m\}$. $\lrcorner$

Se trabajará con los espacios $L^\infty(\mathcal{I}, \mathbb{R}^m)$, $L^\infty(\mathcal{I}, \mathbb{R}^{n \times m})$, $L^\infty(\mathcal{I})$, $L^1(\mathcal{I})$ y $L^2(\mathcal{I})$ (con sus variantes *loc*) a lo largo de este capítulo.

2.1.2. Ecuaciones diferenciales ordinarias y lineales

Definición 2.1.13. Sean $J \subset \mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ intervalos y $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto en $\mathbb{R}^n$. Dada una función

$$f: \mathcal{I} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (t, x) \mapsto f(t, x)$$

el **problema del valor inicial (PVI)** (o problema de Cauchy), consiste en encontrar una función diferenciable: $\xi: J \rightarrow \mathcal{X}$, $t \mapsto \xi(t) = (\xi_1(t), \dots, \xi_n(t))$, que cumpla

$$\dot{\xi}(t) = f(t, \xi(t)) \quad \text{y} \quad \xi(\sigma_0) = x_0, \quad \forall t \in J \quad (2.2)$$

para σ_0 y x_0 fijos. El valor $x_0 \in \mathcal{X}$ se denomina **valor inicial**, y el par $(\sigma_0, x_0) \in J \times \mathcal{X}$ condición inicial. $\lrcorner$

En principio se pide que $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ sea diferenciable en J , sin embargo, es posible que alguna ξ_i cumpla con las condiciones del PVI excepto en algún conjunto nulo $O \subset J$, por tanto, se puede relajar la condición de que ξ sea diferenciable en J , a la condición de que ξ sea **diferenciable c.d.** en J , esto equivale a pedir que:

1. ξ sea una función **absolutamente continua** en J ⁶. Para el caso en que J sea de longitud infinita, se pide que ξ sea **localmente absolutamente continua (LAC)** en J , es decir, para todo compacto $K \subset J$, la función ξ es absolutamente continua. A su vez, esta última condición es equivalente a pedir que,
2. para cada ξ_i existe $g_i: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{X}$ tal que $\xi(t) = \xi(a) + \int_a^t g(\tau) d\tau$ para todo $t \in K = [a, b] \subset J$.

La demostración de estas equivalencias se puede consultar en [60, Teo. 20.8] o en [61, Teo. 7.18]. Por tanto, en la Definición 2.1.13, es posible sustituir la palabra subrayada “diferenciable” por “LAC” o por “diferenciable c.d.”, siempre y cuando tomando en cuenta que la condición en (2.2) se cumplirá p.c.t. $t \in J$. Todo lo anterior justifica la siguiente definición.

Definición 2.1.14. Una **solución para el PVI (2.2)** en un intervalo J (posiblemente de longitud infinita) tal que $J \subseteq \mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$, con $\sigma_0 \in J$, es una función $\xi: J \rightarrow \mathcal{X}$ LAC que cumple

$$\xi(t) = x_0 + \int_{\sigma_0}^t f(s, \xi(s)) ds \quad \forall t \in J \quad [30, \text{Def. C.2.1}]. \quad \lrcorner$$

⁶Esto es, si $J = (a, b)$, entonces para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cualquier secuencia de puntos (intervalos disjuntos) $a < a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \dots < a_k < b_k$, con $k \in \mathbb{N}$, si ocurre que $\sum_{i=1}^k |b_i - a_i| < \delta$ entonces $\sum_{i=1}^k \|\xi(b_i) - \xi(a_i)\| < \varepsilon$ [30, p. 471].

La equivalencia de ser diferenciable c.d. a ser LAC permite usar propiedades de la derivada en problemas de valor inicial (PVI) como la regla de la cadena o la linealidad, o resultados más fuertes como el teorema fundamental del cálculo [61, Teo. 7.20] (teniendo en cuenta su cumplimiento salvo en un conjunto nulo).

Resultados de existencia y unicidad

Existen distintos resultados respecto a la existencia y/o unicidad de una solución para el PVI, en esta tesis se tomarán en cuenta los dos siguientes.

Teorema 2.1.15. Sea $f : \mathcal{I} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Si f es tal que

$$I. f(\cdot, x) : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ es medible para cada } x \in \mathcal{X}, \quad (2.3)$$

$$II. f(t, \cdot) : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ es continua para cada } t \in \mathcal{I}, \quad (2.4)$$

y además se cumple que

1. f es **localmente Lipschitz continua en la segunda variable**, esto es, para cada $x_0 \in \mathcal{X}$ existen $\rho > 0$ y $\alpha : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ función localmente integrable, tales que

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq \alpha(t)\|x - y\|$$

para cada $t \in \mathcal{I}$ y cada $x, y \in B_{\mathbb{R}^n}(x_0, \rho) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| < \rho\} \subseteq \mathcal{X}$.

2. f es **localmente integrable en t** , es decir, para cada x_0 existe una función localmente integrable $\beta : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que $\|f(t, x_0)\| \leq \beta(t)$ p.c.t. $t \in \mathcal{I}$.

Entonces, para cada par $(\sigma, x_0) \in \mathcal{I} \times \mathcal{X}$, existe $J \neq \emptyset$ con $J \subseteq \mathcal{I}$ y abierto relativo a $\mathcal{I}$, y existe una solución ξ al PVI (2.2), con la siguiente propiedad: si $\zeta : J' \rightarrow \mathcal{X}$ es cualquier otra solución del PVI, donde $J' \subseteq \mathcal{I}$, entonces necesariamente $J' \subseteq J$ y $\xi = \zeta$ en J' . La solución ξ se llama **solución maximal** del problema del valor inicial en el intervalo $\mathcal{I}$ [30, Teo. 54]. $\lrcorner$

Proposición 2.1.16. Considérense las mismas hipótesis del Teorema 2.1.15, salvo que $[\sigma_0, \infty) \subseteq \mathcal{I}$, y α es independiente de x_0 , con $\rho = \infty$ (**Lipschitz continua global en $\mathcal{I}$**), en otras palabras, existe $\alpha : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ localmente integrable tal que $\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq \alpha(t)\|x - y\|$, para cada $t \in \mathcal{I}$ y $x, y \in \mathbb{R}^n$. Entonces $J = [\sigma_0, \infty)$ (intervalo donde existe la solución única) [30, Prop. C.3.8]. $\lrcorner$

Las demostración de estos dos resultados se puede consultar en [30, Apénd. C]. El Teorema 2.1.15 es básicamente una combinación del teorema de existencia de Carathéodory [62, Cap. 1, Teo. 5.1], y el teorema de Picard Lindelöf [55, Teo. 6.19]. Las condiciones I., II. y 1. del Teorema 2.1.15, también se denominan “condiciones de Carathéodory” [62, p. 28], y la condición 2 es una hipótesis fundamental del teorema de Picard-Lindelöf.

Es importante mencionar que la prueba del Teorema 2.1.15 utiliza el teorema de punto fijo de Banach.

Teorema 2.1.17. [de punto fijo de Banach] Sea $(\mathcal{X}, d)$ un espacio métrico completo, no vacío, y sea $\phi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ una **contracción**⁷. Entonces se cumple:

⁷Es decir, existe $\alpha \in (0, 1) \subset \mathbb{R}$ (llamada constante de contracción) tal que $d(\phi(x), \phi(y)) \leq \alpha d(x, y)$ para cualesquiera $x, y \in \mathcal{X}$.

- (a) ϕ tiene un único **punto fijo** x^* , es decir, existe $x^* \in \mathcal{X}$ tal que $\phi(x^*) = x^*$.
- (b) Para cualquier $x_0 \in \mathcal{X}$ la sucesión $(\phi^k(x_0))$ converge a x^* en $\mathcal{X}$, y se cumple que $d(\phi^k(x_0), x^*) \leq \frac{\alpha^k}{1-\alpha} d(\phi(x_0), x_0)$, donde α es la constante de la contracción ϕ , y ϕ^k denota la k -ésima iteración de ϕ para $k \in \mathbb{N}$, con $\phi^0 := id_{\mathcal{X}}$ [55, Teo. 6.3]. ┘

La prueba del Teorema de Picard-Lindelöf (como se muestra en [55, Teo. 6.19]), considera $\mathcal{Y} := C^0([\sigma_0 - \delta, \sigma_0 + \delta], \mathbb{R}^n)$ ⁸, que es un espacio métrico completo con la métrica inducida por la norma uniforme ($\|f\|_{\infty} := \max_{t \in [\sigma_0 - \delta, \sigma_0 + \delta]} \|f(t)\|$) [55, Teo. 5.2], y se trabaja con la función:

$$\phi : \mathcal{Y}_{\delta} \rightarrow \mathcal{Y}_{\delta}, \quad \xi \mapsto \phi(\xi(t)) := x_0 + \int_{\sigma_0}^t f(s, \xi(s)) ds, \quad (2.5)$$

buscando $\mathcal{Y}_{\delta}$ algún subespacio métrico completo de $\mathcal{Y}$ tal que ϕ sea una contracción en $\mathcal{Y}_{\delta}$. De este modo se puede asegurar que el PVI tiene solución única (correspondiente al punto fijo del teorema) y también se puede hacer una aproximación de la solución mediante las iteraciones mencionadas en el inciso (b). El método de iteraciones en (2.5) se conoce comúnmente como el **método de aproximaciones sucesivas de Picard**, o **iteraciones de Picard**.

Existencia de la solución del PVI lineal no homogéneo

Sea $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ un intervalo. Se considera una función $A = (a_{i,j}) \in L_{loc}^{\infty}(\mathcal{I}, \mathbb{R}^{n \times n})$, $(i, j) \in \bar{n} \times \bar{n}$, que por la Observación 2.1.12 equivale a tomar $A \in M_{n \times n}(L_{loc}^{\infty}(\mathcal{I}))$, matriz cuyas entradas son funciones $a_{ij} : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ medibles y localmente esencialmente acotadas. Por otra parte sea $\nu : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ tal que $\nu_i \in L_{loc}^1(\mathcal{I})$ para todo $i \in \bar{n}$. Sin pérdida de generalidad (s.p.g.), se pueden suponer que $A \in M_{n \times n}(L_{loc}^{\infty}(\mathbb{R}))$ y $\nu_i(t) \in L_{loc}^1(\mathbb{R})$ con la extensión trivial. Con lo anterior definido, se considera el PVI:

$$\dot{\xi}(t) = \underbrace{A(t)\xi(t)}_{\text{parte homogénea}} + \underbrace{\nu(t)}_{\text{parte no homogénea}}, \quad \xi(\sigma_0) = x_0. \quad (2.6)$$

Cuando $\nu(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, el PVI se denomina **lineal homogéneo**, y en caso contrario **lineal no homogéneo**. Para que la multiplicación de matrices “ $A(t)\xi(t)$ ” tenga sentido, $\xi(t)$ debe ser elemento de $M_{n \times 1}(\mathbb{R})$ para cada $t \in \mathbb{R}$, esto se justifica por el Lema 2.1.11. Con ayuda del Teorema 2.1.15 y la Proposición 2.1.16 se puede probar lo siguiente.

Proposición 2.1.18. *El PVI en (2.6) tiene solución única en el intervalo $[\sigma, \infty) \subset \mathbb{R}$.* ┘

Prueba. Ver Prop. A.1.6 en la página 151. □

La matriz de la solución principal y la fórmula de variación de parámetros

Se dirige la atención al caso homogéneo de (2.6):

$$\dot{\xi}(t) = A(t)\xi(t), \quad \xi(\sigma_0) = x_0. \quad (2.7)$$

⁸ $C^0([a, b], \mathbb{R}^n) := \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n \mid f \text{ es continua con la norma } \infty\}$.

La Proposición 2.1.18 asegura que la siguiente función $\hat{\Phi}$ (asociada a la matriz A) está bien definida:

$$\begin{aligned} \hat{\Phi} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \{\zeta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \mid \zeta \text{ es LAC}\} \\ (\sigma, x) &\mapsto \hat{\Phi}(\sigma, x)(t) := \hat{\Phi}(t, \sigma, x) := \begin{cases} \xi(t) & \text{si } t \in [\sigma, \infty) \\ \eta(\sigma - t) & \text{si } t \in (-\infty, \sigma), \end{cases} \end{aligned} \quad (2.8)$$

donde ξ es la solución de $\dot{\xi}(t) = A(t)\xi(t)$, $\xi(\sigma) = x$ y η de $\dot{\eta}(t) = -A(\sigma - t)\eta(t)$, $\eta(0) = x$. De este modo $\hat{\Phi}(t, \sigma_0, x_0)$ es la solución de (2.7) extendida (a través de η) a todo $\mathbb{R}$.

Por otro parte, el siguiente PVI está estrechamente vinculado al problema en (2.7):

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t), \quad X(\sigma) = I \quad (2.9)$$

donde I es la matriz identidad en $\mathbb{R}^{n \times n}$ y X es una matriz de $n \times n$ funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

Corolario 2.1.19. *El PVI en (2.9) tiene solución única en el intervalo $[\sigma, \infty) \subset \mathbb{R}$.* J

Prueba. Ver Prop. A.1.7 en la página 153. □

El Corolario 2.1.19 asegura que la siguiente función está bien definida:

$$\Pi : \mathbb{R} \rightarrow \{\zeta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n} \mid \zeta \text{ es LAC}\}, \quad \sigma \mapsto \Pi(\sigma)(t) := \Pi(t, \sigma), \quad (2.10)$$

donde a cada $\sigma \in \mathbb{R}$ se le asocia la función $\Pi(t, \sigma)$ correspondiente a la solución única del PVI (2.9), definida en todo $\mathbb{R}$ por el mismo argumento que en (2.8).

Ahora considérense los siguientes n PVIs:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1(t) &= A(t)\xi_1(t), & \xi_1(\sigma) &= e_1 \\ &\vdots & &\vdots \\ \dot{\xi}_n(t) &= A(t)\xi_n(t), & \xi_n(\sigma) &= e_n, \end{aligned} \quad (2.11)$$

donde cada e_i es el vector canónico en $\mathbb{R}^n$. La solución de cada problema en (2.11) es $\hat{\Phi}(t, \sigma, e_i)$ para $i \in \bar{n}$.

Sea V un espacio vectorial, y sean $\{v_1, \dots, v_n\} \subset V^n$ con $v_i = (v_1^i, v_2^i, \dots, v_n^i)$ para todo $i \in \bar{n}$, se usa la siguiente convención de notación:

$$[v_1 \dots v_n] := \begin{pmatrix} v_1^1 & \dots & v_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_n^1 & \dots & v_n^n \end{pmatrix} \in M_{n \times n}(V). \quad (2.12)$$

Ahora se define la función

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R} &\rightarrow \{\zeta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \mid \zeta \text{ es LAC}\} \\ \sigma &\mapsto \Phi(\sigma)(t) := \Phi(t, \sigma) := [\hat{\Phi}(t, \sigma, e_1) \dots \hat{\Phi}(t, \sigma, e_n)], \end{aligned} \quad (2.13)$$

es decir, $\Phi(t, \sigma)$ es la matriz cuyas columnas son las soluciones de cada PVI en (2.11). Se observa que

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}(t, \sigma) &= [\dot{\hat{\Phi}}(t, \sigma, e_1) \dots \dot{\hat{\Phi}}(t, \sigma, e_n)] = [A(t)\hat{\Phi}(t, \sigma, e_1) \dots A(t)\hat{\Phi}(t, \sigma, e_n)] \\ &= A(t)[\hat{\Phi}(t, \sigma, e_1) \dots \hat{\Phi}(t, \sigma, e_n)] = A(t)\Phi(t, \sigma). \end{aligned}$$

Así, se cumple que $\dot{\Phi}(t, \sigma) = A(t)\Phi(t, \sigma)$ y además como $\Phi(\sigma, \sigma, e_i) = e_i$ para todo $i \in \bar{n}$, se tiene que $\Phi(\sigma, \sigma) = [e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n] = I$, por lo tanto $\Phi(t, \sigma)$ satisface el mismo PVI que en (2.9), y por la unicidad de su solución se concluye que $\Pi(t, \sigma) = \Phi(t, \sigma)$, es decir, la función Π definida en (2.10) y correspondiente a la solución de (2.9) es igual a la función Φ definida en (2.13). Lo anterior dirige al siguiente resultado que relaciona (2.7) con (2.9).

Corolario 2.1.20. $\Phi(t, \sigma_0)x_0$ es la solución del PVI homogéneo en (2.7). ┘

Prueba. Como $\Phi(t, \sigma_0)$ es la solución del PVI en (2.9), se tiene que

$$\dot{\Phi}(t, \sigma_0) = A(t)\Phi(t, \sigma_0), \quad \Phi(\sigma_0, \sigma_0) = I \Rightarrow (\Phi(t, \sigma_0)x_0)' = A(t)\Phi(t, \sigma_0)x_0, \quad \Phi(\sigma_0, \sigma_0)x_0 = x_0.$$

Este último PVI es de la forma $\dot{\zeta}(t) = A(t)\zeta(t)$ con $\zeta(\sigma_0) = x_0$, por lo que es el mismo PVI que en (2.7), y por la unicidad, se concluye que $\Phi(t, \sigma_0)x_0$ es la solución (2.7). □

A raíz de este último resultado, a Φ en (2.13) se le denomina **solución (o matriz) fundamental asociada a A** [30, Apénd. C], **matriz de la solución principal** [63, Cap. 3], o **matriz especial fundamental** [64, Cap. 3].

Proposición 2.1.21. La solución del PVI lineal no homogéneo: $\dot{\xi}(t) = A(t)\xi(t) + \nu(t)$ es

$$\xi(t) = \Phi(t, \sigma_0)x_0 + \int_{\sigma_0}^t \Phi(t, s)\nu(s) ds \quad (2.14)$$

y se denomina **fórmula de la variación de parámetros**. ┘

Prueba. Ver Prop. A.1.11 □

La serie de Peano-Baker y la matriz exponencial del caso invariante en el tiempo

Arriba se argumentó que es posible aproximar la solución $\xi(t)$ de un PVI que cumpla las hipótesis del Teorema 2.1.15 con el método de iteraciones de Picard, aplicando este método al PVI lineal homogéneo descrito en (2.9), se tiene el siguiente resultado.

Proposición 2.1.22. Si $X^k(t)$ es la k -ésima iteración de Picard del PVI en (2.9), dada por la sucesión recursiva: $X^0(t) = I$, $X^{k+1}(t) = I + \int_{\sigma}^t A(s)X^{k-1}(s) ds$, entonces

$$\sum_{i=0}^k \mathfrak{I}_i(t) = X^k(t) \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad (2.15)$$

donde $\mathfrak{I}_0(t) := I$ y $\mathfrak{I}_k(t) := \int_{\sigma}^t \int_{\sigma}^{s_1} \dots \int_{\sigma}^{s_{k-1}} A(s_1)A(s_2) \dots A(s_k) ds_k \dots ds_2 ds_1$, $k \in \mathbb{N}_{>0}$. ┘

Prueba. Ver Prop. A.1.12 en la página 157. □

De esta última proposición se sigue que la solución principal $\Phi(t, \sigma)$ (en una vecindad alrededor de σ), se puede expresar mediante la serie que resulta de tomar los límites al infinito en (2.15):

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathfrak{I}_k(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} X^k(t) = \Phi(t, \sigma). \quad (2.16)$$

La serie en (2.16) se denomina *serie de Peano-Baker*, y es una manera un poco más explícita de expresar Φ . Más sobre esta serie se puede consultar en [66] o [30, Apénd. C], el interés para esta tesis está en el caso *invariante en el tiempo*, cuando $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Proposición 2.1.23. Si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, entonces, $\Phi(\tau, \sigma) = e^{(\tau-\sigma)A}$ para todo $\tau, \sigma \in \mathbb{R}$, donde

$$e^{tA} := I + tA + \frac{t^2}{2}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \dots + \frac{t^k}{k!}A^k + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}A^k, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (2.17)$$

En particular, la matriz $e^{(1)A} = e^A$ se denomina **matriz exponencial** [30, Ej. C.4.1. e)]. $\lrcorner$

Prueba. Ver Prop. A.1.13 en la página 157. $\square$

Corolario 2.1.24. Si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, entonces la solución del PVI no homogéneo en (2.6), es decir, de $\dot{\xi}(t) = A\xi(t) + \nu(t)$, $\xi(\sigma_0) = x_0$, es

$$\xi(t) = e^{(t-\sigma_0)A}x_0 + \int_{\sigma_0}^t e^{(t-s)A}\nu(s) ds. \quad \lrcorner$$

Prueba. Este resultado se sigue de forma inmediata de la fórmula de variación de parámetros en (2.14) y la Prop. 2.1.23. $\square$

2.2. Teoría del control: de sistemas generales a sistemas lineales e invariantes en el tiempo de dimensión finita

Esta sección será la base para poder explicar las relaciones entre sistema, caja negra (*comportamiento*), respuesta al impulso, producto convolución y función de transferencia. Casi todas las definiciones propias de la teoría del control que se enuncian en esta sección (y en secciones posteriores) provienen de [30], además, varias de las proposiciones más importantes para esta tesis respecto a los sistemas LIT son ejercicios del libro de Eduardo Sontag (las pruebas se trasladarán al Apéndice A).

2.2.1. Definiciones básicas

Definición 2.2.1. Un **sistema** o **máquina** $\Sigma = (\mathcal{T}, \mathcal{X}, \mathcal{U}, \phi)$ consta de:

1. $(\mathcal{T}, +)$ subgrupo de $(\mathbb{R}, +)$ con la suma usual. $\mathcal{T}$ se denomina **conjunto de tiempo**,
2. un conjunto $\mathcal{X} \neq \emptyset$, llamado conjunto o **espacio de estados** de Σ ,
3. un conjunto $\mathcal{U} \neq \emptyset$, llamado conjunto o **espacio de valores de entrada (o de control)** de Σ , y
4. una función $\phi : D_\phi \rightarrow \mathcal{X}$ llamada **función de transición**, donde

$$\emptyset \neq D_\phi \subseteq \{(\tau, \sigma, x, \omega) \mid \sigma, \tau \in \mathcal{T}, \sigma \leq \tau, x \in \mathcal{X}, \omega \in \mathcal{U}^{[\sigma, \tau)}\},$$

que cumple las siguientes cuatro propiedades:

- I. **No trivialidad.** Para cada $x \in \mathcal{X}$ existe al menos un par $\sigma, \tau \in \mathcal{T}$, $\sigma < \tau$, y existe $\omega \in \mathcal{U}^{[\sigma, \tau]}$, tal que ω **es admisible para** x , es decir, $(\tau, \sigma, x, \omega) \in D_\phi$. Si ω es admisible para x también se dice que el par (x, ω) es un **par admisible**.
- II. **Restricción.** Si $\omega \in \mathcal{U}^{[\sigma, \mu]}$ es admisible para x , entonces para cada $\tau \in [\sigma, \mu)$, la restricción $\omega_1 := \omega|_{[\sigma, \tau]}$ es admisible para x y la restricción $\omega_2 := \omega|_{[\tau, \mu]}$ es admisible para $\phi(\tau, \sigma, x, \omega_1)$.
- III. **Semigrupo.** Si $\sigma, \tau, \mu \in \mathcal{T}$, $\sigma < \tau < \mu$, $\omega_1 \in \mathcal{U}^{[\sigma, \tau]}$, $\omega_2 \in \mathcal{U}^{[\tau, \mu]}$, y $x \in \mathcal{X}$ son tales que $\phi(\tau, \sigma, x, \omega_1) = x_1$ y $\phi(\mu, \tau, x_1, \omega_2) = x_2$, entonces la **concatenación** $\omega_1 \oplus \omega_2 \in \mathcal{U}^{[\sigma, \mu]}$ definida como

$$\oplus : \mathcal{U}^{[\sigma, \tau]} \times \mathcal{U}^{[\tau, \mu]} \rightarrow \mathcal{U}^{[\sigma, \mu]}, (\omega_1, \omega_2) \mapsto \omega_1 \oplus \omega_2(t) := \begin{cases} \omega_1(t) & \text{si } t \in [\sigma, \tau) \\ \omega_2(t) & \text{si } t \in [\tau, \mu) \end{cases}$$

es admisible para x y $\phi(\mu, \sigma, x, \omega_1 \oplus \omega_2) = x_2$. Por tanto

$$\phi(\mu, \sigma, x, \omega_1 \oplus \omega_2) = \phi(\mu, \tau, \phi(\tau, \sigma, x, \omega_1), \omega_2) = \phi(\mu, \tau, x_1, \omega_2) = x_2.$$

Se conviene que $\omega \oplus \diamond = \diamond \oplus \omega := \omega$, para cualquier $\omega \in \mathcal{U}^{[\mu, \tau]}$, donde $\diamond$ es el conjunto cuyo único elemento es el vacío, es decir $\diamond := \{\emptyset\}$.

- IV. **Identidad.** Para cada $\sigma \in \mathcal{T}$ y cada $x \in \mathcal{X}$, el conjunto $\diamond := \{\emptyset\} = \mathcal{U}^{[\sigma, \sigma]}$, es admisible para x y $\phi(\sigma, \sigma, x, \diamond) = x$ [30, Def. 2.1.2]. $\lrcorner$

Definición 2.2.2. Sea $\Sigma = (\mathcal{T}, \mathcal{X}, \mathcal{U}, \phi)$ un sistema.

(a) Σ es **completo** si $D_\phi = \{(\tau, \sigma, x, \omega) \mid \sigma, \tau \in \mathcal{T}, \sigma \leq \tau, x \in \mathcal{X}, \omega \in \mathcal{U}^{[\sigma, \tau]}\}$.

(b) Σ es un **sistema con salidas**, si existe

- I. un conjunto $\mathcal{Y}$ denominado **espacio de valores de salida** y
- II. una función $h : \mathcal{T} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ denominada **función de lectura de salida**.

(c) Σ es **invariante en el tiempo** si para cualesquiera $\omega \in \mathcal{U}^{[\sigma, \tau]}$, $x \in \mathcal{X}$ y $\mu \in \mathcal{T}$, tales que ω es admisible para x , entonces la **traslación** $\mathbb{T}_\mu \omega \in \mathcal{U}^{[\sigma+\mu, \tau+\mu]}$, con $\mathbb{T}_\mu \omega(t) := \omega(t - \mu)$, es admisible para x y $\phi(\tau, \sigma, x, \omega) = \phi(\tau + \mu, \sigma + \mu, x, \mathbb{T}_\mu \omega)$.

Un **sistema con salidas invariante en el tiempo** consta de Σ sistema invariante en el tiempo, donde además la función de lectura de salida $h(\tau, x)$ no depende de τ .

(d) El **sistema inicializado** es el par (Σ, x_0) , con $x_0 \in \mathcal{X}$ elemento fijo, denominado **estado inicial** (la misma definición aplica para un sistema con salidas).

(e) Cuando $\mathcal{T} = \mathbb{Z}$, se dice que el sistema o comportamiento (ver Def. 2.2.3 más adelante) es **de tiempo discreto** o simplemente **discreto**. $\lrcorner$

⁹Si f es una función, " D_f " denota el dominio de la función f como subconjunto de algún conjunto conocido. Por otra parte, se recuerda que si A, B son conjuntos, se define $B^A := \{f \subseteq A \times B \mid f \text{ es función}\}$, por lo que $\mathcal{U}^{[\sigma, \tau]}$ es el conjunto de todas las funciones cuyo dominio es $[\sigma, \tau) := \{\mu \in \mathcal{T} \mid \sigma \leq \mu < \tau\}$ y codominio es $\mathcal{U}$.

Estas definiciones¹⁰ buscan caracterizar un sistema a través de “estados” que cambian en el tiempo, en respuesta a una entrada o control $\omega \in \mathcal{U}^{[\sigma, \tau]}$ y mediante la función de transición ϕ . La Figura 2.1 busca ilustrar como opera ϕ , y como un sistema cambia mediante entradas o controles ω .

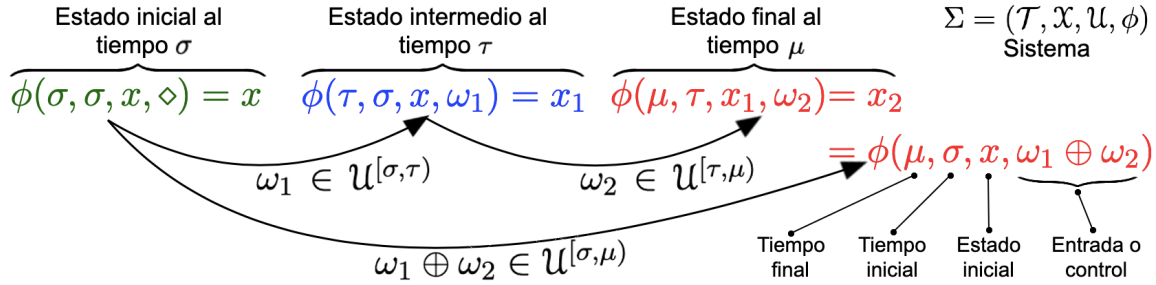


Figura 2.1: Modo de operar de la función de transición ϕ de un sistema $\Sigma = (\mathcal{T}, \mathcal{X}, \mathcal{U}, \phi)$, se busca ilustrar el axioma de identidad (verde) y el axioma de semigrupo (rojo). Abajo a la derecha se señala como el primer argumento de ϕ es el tiempo final μ , el segundo el tiempo inicial σ , el tercero es el estado $x \in \mathcal{X}$ al tiempo inicial σ , y el cuarto es el control que se aplica al tiempo inicial σ , con duración $\tau - \sigma$. De esta forma el estado final x_2 al tiempo μ es $\phi(\mu, \sigma, x, \omega_1 \oplus \omega_2)$.

Por otra parte se tiene la caracterización de sistema como “caja negra”, es decir, un sistema (como el de la Def. 2.2.1) con salidas, en el que (en principio) no es posible conocer sus estados, pero sí es posible registrar su comportamiento entrada/salida (*input/output*). La caja negra en cuestión, se denominará *comportamiento*.

Definición 2.2.3. Un **comportamiento** $\Lambda = (\mathcal{T}, \mathcal{U}, \mathcal{Y}, \lambda)$ consta de:

1. un conjunto de tiempo $\mathcal{T}$,
2. un conjunto $\mathcal{U} \neq \emptyset$, llamado conjunto o **espacio de valores de entrada (o de control)** de Λ ,
3. un conjunto $\mathcal{Y} \neq \emptyset$, llamado conjunto o **espacio de valores de salida** de Λ , y
4. una función $\lambda : D_\lambda \rightarrow \mathcal{Y}$, llamada **función de respuesta**, donde

$$D_\lambda \subseteq \{(\tau, \sigma, \omega) \mid \sigma, \tau \in \mathcal{T}, \sigma \leq \tau, \omega \in \mathcal{U}^{[\sigma, \tau]}\},$$

y donde se cumple la **propiedad de restricción**: si $(\tau, \sigma, \omega) \in D_\lambda$, entonces

$$(\mu, \sigma, \omega|_{[\sigma, \mu]}) \in D_\lambda, \quad \forall \mu \in [\sigma, \tau].$$

Para cualquier $\sigma, \tau \in \mathcal{T}$ fijas, se tiene la siguiente convención $\lambda^{\sigma, \tau}(\omega) := \lambda(\tau, \sigma, \omega)$ [30, Def. 2.2.4]. ┘

Definición 2.2.4. Sea $\Lambda = (\mathcal{T}, \mathcal{U}, \mathcal{Y}, \lambda)$ un comportamiento.

¹⁰Sontag menciona que en el contexto de la ciencia de la computación, donde el sistema es discreto y $\mathcal{X}, \mathcal{U}$ tienen cardinalidad finita, el sistema se denomina *autómata*, y si existe un espacio de salidas $\mathcal{Y}$ se denomina *máquina secuencial*. Estos conceptos nacidos de la CC “proporcionaron gran parte de la motivación original para el desarrollo de los conceptos básicos de la teoría de sistemas” [30, p. 33].

- (a) Λ es **completo** si $D_\lambda = \{(\tau, \sigma, \omega) \mid \sigma, \tau \in \mathcal{T}, \sigma \leq \tau, \omega \in \mathcal{U}^{[\sigma, \tau]}\}$.
- (b) Λ es **invariante en el tiempo** si para cada $(\tau, \sigma, \omega) \in D_\lambda$ y cada $\mu \in \mathcal{T}$, se tiene que $(\tau + \mu, \sigma + \mu, \mathbb{T}_\mu \omega) \in D_\lambda$ y $\lambda^{\sigma+\mu, \tau+\mu}(\mathbb{T}_\mu \omega) = \lambda^{\sigma, \tau}(\omega)$. $\lrcorner$

Dado un comportamiento con función de respuesta λ , es natural considerar no solo el valor de salida final ante una entrada $\omega \in \mathcal{U}^{[\sigma, \tau]}$ (proporcionado por la evaluación $\lambda(\tau, \sigma, \omega)$) sino toda la función de salida, la siguiente definición considera este caso de interés.

Definición 2.2.5. Dado un comportamiento Λ , se define la **función i/o** o **función de salida** de Λ como

$$\bar{\lambda}: D_\lambda \rightarrow \bigcup_{\sigma \leq \tau} \mathcal{Y}^{[\sigma, \tau]}, \quad (\tau, \sigma, \omega) \mapsto \bar{\lambda}(\tau, \sigma, \omega)(t) := \lambda^{\sigma, t}(\omega|_{[\sigma, t]}) \quad [30, \text{Obs. 2.2.2}].$$

La relación entre la función de respuesta λ y la función i/o es: $\lambda^{\sigma, \tau}(\omega) = \bar{\lambda}(\tau, \sigma, \omega)(\tau)$. De manera similar a la función de respuesta, se conviene la notación $\bar{\lambda}^{\sigma, \tau}(\omega) := \bar{\lambda}(\tau, \sigma, \omega)$. Cuando el contexto sea claro, se denotará simplemente $\bar{\lambda}(\omega)(t) := \bar{\lambda}^{0, t}(\omega)(t)$ ¹¹. $\lrcorner$

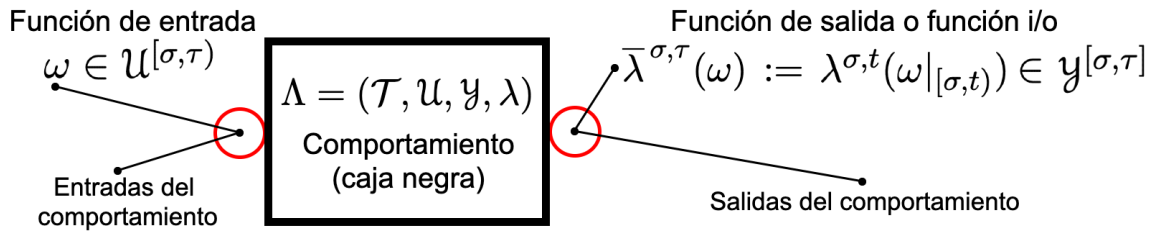


Figura 2.2: Modo de operar de un comportamiento $\Lambda = (\mathcal{T}, \mathcal{U}, \mathcal{Y}, \lambda)$. Una entrada o control $\omega \in \mathcal{U}^{[\sigma, \tau]}$ es transformada por Λ y da lugar a la función de salida $\bar{\lambda}^{\sigma, \tau}(\omega)$.

Las últimas dos definiciones básicas que se mencionan, relacionan un sistema inicializado con un comportamiento Λ .

Definición 2.2.6. Sea (Σ, x_0) un sistema inicializado con $\Sigma = (\mathcal{T}, \mathcal{X}, \mathcal{U}, \phi)$.

- (a) El **comportamiento i/s** (input to state) Λ del sistema (Σ, x_0) es el comportamiento $\Lambda = (\mathcal{T}, \mathcal{U}, \mathcal{X}, \lambda)$ (en este caso $\mathcal{Y} = \mathcal{X}$), cuya función de respuesta λ está definida en la proyección $\{(\tau, \sigma, \omega) \mid (\tau, \sigma, x_0, \omega) \in \mathcal{D}_\phi\}$, donde $\lambda^{\sigma, \tau}(\omega) := \phi(\tau, \sigma, x_0, \omega)$.
- (b) Si Σ es un sistema con salidas en $\mathcal{Y}$, con $h: \mathcal{T} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ función de lectura de salida. El **comportamiento del sistema inicializado** (Σ, x_0) (denotado Λ_{Σ, x_0}), es el comportamiento $\Lambda_{\Sigma, x_0} = (\mathcal{T}, \mathcal{U}, \mathcal{Y}, \lambda)$, cuya función de respuesta λ se define como

$$\lambda: D_\lambda \rightarrow \mathcal{Y}, \quad (\tau, \sigma, \omega) \mapsto \lambda^{\sigma, \tau}(\omega) := h(\tau, \phi(\tau, \sigma, x_0, \omega)), \quad (2.18)$$

donde $D_\lambda \subseteq \{(\tau, \sigma, \omega) \mid (\tau, \sigma, x_0, \omega) \in \mathcal{D}_\phi\}$. Así, λ es la **función de respuesta del sistema inicializado** (Σ, x_0) ¹² [30, Def. 2.2.4]. $\lrcorner$

¹¹Más adelante se verá que en un sistema/comportamiento LIT (ya sea discreto o continuo) $\lambda^{\sigma, \sigma}(\omega) = \lambda^{\sigma, \sigma}(\omega|_{[\sigma, \sigma]}) = \lambda^{\sigma, \sigma}(\phi) = 0$, por lo que en este caso se convendrá $(\sigma, \tau]$ como el dominio de $\bar{\lambda}$.

¹²La propiedad de restricción de la función ϕ del sistema Σ garantiza la propiedad de restricción de la función de respuesta λ del comportamiento Λ_{Σ, x_0} .

Observación 2.2.7. *Todo sistema $\Sigma = (\mathcal{T}, \mathcal{X}, \mathcal{U}, \phi)$, es un sistema con salidas en $\mathcal{Y} = \mathcal{X}$, con función de lectura de salida $h : \mathcal{T} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ definida como $h(\tau, x) := \phi(\tau, \tau, x, \diamond) = x$ (por el axioma de identidad). Al considerar el comportamiento Λ_{Σ, x_0} del sistema inicializado (Σ, x_0) con salidas en $\mathcal{Y} = \mathcal{X}$, la Definición 2.2.6 2, muestra que $\lambda^{\sigma, \tau}(\omega) := h(\tau, \phi(\tau, \sigma, x_0, \omega)) := \phi(\tau, \tau, \phi(\tau, \sigma, x_0, \omega), \diamond) = \phi(\tau, \sigma, x_0, \omega)$. Por tanto, todo comportamiento i/s, es el caso particular de un comportamiento Λ_{Σ, x_0} de un sistema inicializado (Σ, x_0) . Se subraya como todo sistema inicializado se puede ver como un comportamiento mediante (2.18).* $\lrcorner$

Función	Características
$\phi : D_\phi \rightarrow \mathcal{X}$ (de transición)	Asociada a un sistema Σ . Ayuda a describir al sistema a través de cambios de estado en el tiempo.
$h : \mathcal{T} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ (de lectura de salida)	Asociada a un sistema con salidas Σ . A partir de ella se puede definir la función de respuesta λ del comportamiento Λ_{Σ, x_0} (del sistema inicializado con salidas (Σ, x_0)) mediante $\lambda^{\sigma, \tau}(\omega) := h(\tau, \phi(\tau, \sigma, x_0, \omega))$. Todo sistema es un sistema con salidas en $\mathcal{Y} = \mathcal{X}$ con $h(\tau, x) = x$, y en este caso el comportamiento asociado Λ_{Σ, x_0} se denomina comportamiento i/s.
$\lambda : D_\lambda \rightarrow \mathcal{Y}$ (de respuesta)	Asociada a un comportamiento Λ . $\lambda^{\sigma, \tau}(\omega) \in \mathcal{Y}$ es el valor de salida al tiempo τ , ante la entrada $\omega \in \mathcal{U}^{[\sigma, \tau]}$.
$\bar{\lambda} : D_\lambda \rightarrow \bigcup_{\sigma \leq \tau} \mathcal{Y}^{[\sigma, \tau]}$ (de salida o función i/o)	Asociada a un comportamiento Λ . $\lambda^{\sigma, \tau}(\omega) \in \mathcal{Y}^{[\sigma, \tau]}$ es toda la función de salida en respuesta a la entrada $\omega \in \mathcal{U}^{[\sigma, \tau]}$.

Tabla 2.1: Aspectos importantes sobre las funciones ϕ , h , λ y $\bar{\lambda}$.

2.2.2. Sistemas lineales de tiempo discreto e invariantes en el tiempo

A menos que se señale lo contrario, en lo que resta de la sección los espacios vectoriales mencionados se suponen sobre $\mathbb{R}$.

Sea $\Sigma = (\mathbb{Z}, \mathcal{X}, \mathcal{U}, \phi)$, se define la función $\mathcal{P}$ (asociada a la función ϕ) como

$$\mathcal{P} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{Y}, \quad (t, x, u) \mapsto \mathcal{P}(t, x, u) := \phi(t+1, t, x, \omega_u), \quad (2.19)$$

donde $\mathcal{E} = \{(t, x, u) \in \mathbb{Z} \times \mathcal{X} \times \mathcal{U} \mid (t+1, t, x, \omega_u) \in D_\phi\}$, y donde $\omega_u \in \mathcal{U}^{\{t\}}$ y es tal que $\omega_u(t) = u$ ¹³. La función $\mathcal{P}$ se denomina **función de transición al siguiente estado**.

Definición 2.2.8. Σ es un **sistema lineal de tiempo discreto** (sobre $\mathbb{R}$) si:

¹³Más adelante se abusará de la notación $u(t) = \omega_u(t)$.

1. es completo, **2.** $\mathcal{X}$ y $\mathcal{U}$ son espacios vectoriales, y **3.** para cada $t \in \mathbb{Z}$, la función $\mathcal{P}(t, \cdot, \cdot) := \phi(t+1, t, \cdot, \cdot)$ es lineal.

El sistema con salidas es lineal si además: **1.** $\mathcal{Y}$ es un espacio vectorial, y **2.** $h(t, \cdot)$ es lineal para cada $t \in \mathbb{Z}$.

El sistema es de **dimensión finita** si los espacios $\mathcal{U}$ y $\mathcal{X}$ lo son, así como $\mathcal{Y}$ para un sistema con salidas. La **dimensión** del sistema es la dimensión de $\mathcal{X}$. [30, Def. 2.4.1] $\lrcorner$

Observación 2.2.9. Sea Σ lineal de tiempo discreto, como el sistema es completo y $\mathcal{P}(t, \cdot, \cdot) : \mathcal{X} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{X}$ es lineal, se puede definir

$$\mathcal{P}(t, x, u) = \underbrace{\mathcal{P}(t, \cdot, 0)}_{=: A(t)[x]} + \underbrace{\mathcal{P}(t, 0, \cdot)}_{=: B(t)[u]} = A(t)[x] + B(t)[u] \stackrel{\text{Notación}}{=} A(t)x + B(t)u \quad \forall t \in \mathbb{Z}. \quad (2.20)$$

Para Σ con salidas en $\mathcal{Y}$, como $h(t, \cdot)$ es lineal para cada $t \in \mathbb{Z}$, además se define

$$h(t, x) := C(t)[x] \stackrel{\text{Notación}}{=} C(t)x. \quad (2.21)$$

Se usará la expresión “el sistema $(A(t), B(t), C(t))$ ”, para denominar al sistema Σ lineal (con salidas) discreto cuya función $\mathcal{P}$ es (2.20) y h es (2.21). Si el sistema es invariante en el tiempo, entonces $\mathcal{P}(t, x, u)$ no depende de t ($\mathcal{P}(t, x, u) = \mathcal{P}(x, u)$), por lo que $A(t)$, $B(t)$ y $C(t)$ son constantes y se trata de un sistema (A, B, C) .

Si $\mathcal{X}$, $\mathcal{U}$ y $\mathcal{Y}$ tienen dimensión finita, se conviene usar $n, m, p \in \mathbb{N}_{>0}$ tales que $n = \dim(\mathcal{X})$, $m = \dim(\mathcal{U})$ y $p = \dim(\mathcal{Y})$. Dado que en cualesquiera dos espacios V, W con $\dim(V) = m$ y $\dim(W) = p$ se cumple que $\mathcal{L}(V, W) \stackrel{14}{\cong} \mathbb{R}^{p \times m}$ (isomorfismo lineal) [67, Teo. 3.3], entonces $A(t)$, $B(t)$ y $C(t)$ se pueden identificar como matrices para cada $t \in \mathbb{Z}$. Si el sistema es invariante al tiempo y $\mathcal{X}$, $\mathcal{U}$ y $\mathcal{Y}$ tienen dimensión finita, entonces $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ y $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$. $\lrcorner$

Notación 2.2.10. Si $\omega \in \mathcal{U}^{[\sigma, \tau]}$ se conviene que $\omega|_{[\sigma, \mu]}^\mu := \omega|_{[\sigma, \mu]}$ para todo $\mu \in [\sigma, \tau) \subset \mathbb{Z}$. $\lrcorner$

Definición 2.2.11. Λ es un **comportamiento lineal discreto** (sobre $\mathbb{R}$) si:

1. es completo, **2.** $\mathcal{U}$ y $\mathcal{Y}$ son espacios vectoriales, **3.** para cada $\sigma, \tau \in \mathbb{Z}$ tales que $\sigma \leq \tau$, se tiene que $\lambda^{\sigma, \sigma}(\diamond) = 0$ y la función $\lambda^{\sigma, \tau}$ es lineal, y **4.** para cada $\sigma, \mu, \tau \in \mathbb{Z}$, $\sigma < \mu < \tau$ y cada entrada $\omega \in \mathcal{U}^{[\mu, \tau]}$, ocurre que $\lambda^{\sigma, \tau}(\mathbf{0} \oplus \omega) = \lambda^{\mu, \tau}(\omega)$, donde $\mathbf{0}$ es la entrada idénticamente igual a 0 en $[\sigma, \mu)$ [30, Def. 2.4.3]. $\lrcorner$

Proposición 2.2.12. Si Σ es un sistema lineal de tiempo discreto, entonces el comportamiento del sistema inicializado $\Lambda_{\Sigma, 0}$ es lineal [30, Ej. 2.4.4]. $\lrcorner$

Prueba. Ver Prop. A.1.15 en la página 159. $\square$

Observación 2.2.13. Sean $\sigma, \tau \in \mathbb{Z}$, $\sigma < \tau$, $\mathcal{U}, \mathcal{Y}$ espacios vectoriales y $\omega \in \mathcal{U}^{[\sigma, \tau]}$.

Supóngase que para cada $j \in [\sigma, \tau)$ existe $\lambda^{j, \tau} : \mathcal{U}^{[j, \tau]} \rightarrow \mathcal{Y}$ función lineal.

La imagen directa de $[j, \tau)$ bajo ω es el conjunto $\omega([j, \tau)) := \{\omega(\mu) \in \mathcal{U} \mid \mu \in [j, \tau)\}$, entonces, para cada $j \in [\sigma, \tau)$ se define la función

$$\tilde{A}_{\tau j} : \omega([j, \tau)) \rightarrow \mathcal{Y}, \quad \omega(\mu) \mapsto \tilde{A}_{\tau j}[\omega(\mu)] := \lambda^{j, \tau}(\omega^\mu|_j^{j+1} \oplus \mathbf{0}|_{j+1}^\tau)$$

¹⁴ $\mathcal{L}(V, W) := \{T : V \rightarrow W \mid T \text{ es lineal}\}.$

donde $\omega^\mu(j) := \omega(\mu)$ para todo $\omega(\mu) \in \omega([j, \tau))$. Se debe tener en cuenta que $\omega|_\mu^\mu = \diamond$ y $\omega \oplus \diamond = \diamond \oplus \omega := \omega$ para cualquier $\mu \in [\sigma, \tau)$. La linealidad de $\lambda^{j, \tau}$ garantiza que $\tilde{A}_{\tau, j}$ también es lineal y se usa la notación $\tilde{A}_{\tau, j}\omega(\mu) := \tilde{A}_{\tau, j}[\omega(\mu)]$. $\lrcorner$

Proposición 2.2.14. Si Λ es lineal, entonces existe una familia única de funciones lineales $\tilde{A}_{i, j}$, $i, j \in \mathbb{Z}$, $i > j$, tales que para cada $\sigma, \tau \in \mathbb{Z}$, $\sigma < \tau$, $\lambda^{\sigma, \tau}(\omega) = \sum_{j=\sigma}^{\tau-1} \tilde{A}_{\tau, j}\omega(j)$ para todo $\omega \in \mathcal{U}^{[\sigma, \tau)}$ [30, Ej. 2.4.5]. $\lrcorner$

Prueba. Ver Prop. A.1.16 en la página 159. $\square$

Lema 2.2.15. Sea $\Sigma = (\mathbb{Z}, \mathcal{X}, \mathcal{U}, \phi)$ un sistema lineal. Entonces para todo $\sigma, \tau \in \mathbb{Z}$, $\sigma < \tau$ y todo $\omega \in \mathcal{U}^{[\sigma, \tau)}$, y $\mathbf{0} \in \mathcal{U}^{[\sigma, \tau)}$ función cero en $[\sigma, \tau)$, se cumple que

$$\phi(\tau, \sigma, 0, \omega|_\sigma^{\sigma+1} \oplus \mathbf{0}|_{\sigma+1}^\tau) = A(\tau-1)A(\tau-2) \dots A(\sigma+1)B(\sigma)\omega(\sigma),$$

donde se usa la notación $A(\mu_1)A(\mu_2) := A(\mu_1) \circ A(\mu_2)$, $\mu_1, \mu_2 \in [\sigma, \tau)$ y las funciones A, B son las mencionadas en la Obs. 2.2.9. $\lrcorner$

Prueba. Ver Prop. A.1.17 en la página 160. $\square$

Proposición 2.2.16. Si Σ y Λ son lineales, entonces

$$\Lambda_{\Sigma, 0} = \Lambda \iff \tilde{\mathcal{A}}_{i, j} = \begin{cases} C(i)B(j) & \text{si } i = j + 1, \\ C(i)A(i-1)A(i-2) \dots A(j+1)B(j) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

en términos de las funciones lineales de la Prop. 2.2.14 [30, Ej. 2.4.6]. $\lrcorner$

Prueba. Ver Prop. A.1.18 en la página 161. $\square$

Proposición 2.2.17. Sea Λ un comportamiento lineal de tiempo discreto. Considérese la familia de funciones lineales $\{\tilde{\mathcal{A}}_{i, j} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{Y} \mid i > j\}$ presentada en la Proposición 2.2.14. Entonces, Λ es invariante en el tiempo si y solo si existe un conjunto de funciones lineales $\{\mathcal{A}_k : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{Y} \mid k \in \mathbb{N}_{>0}\}$ tal que

$$\tilde{\mathcal{A}}_{i, j} = \mathcal{A}_{i-j} \quad \forall i > j, \quad [30, \text{Ej. 2.4.7}]. \quad (2.22)$$

Prueba. Ver Prop. A.1.19 en la página 162. $\square$

Definición 2.2.18. La sucesión de funciones lineales en (2.22):

$$\mathcal{A} := \{\mathcal{A}_k : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{Y} \mid k \in \mathbb{N}_{>0}\},$$

se denomina **respuesta al impulso (RI)** del comportamiento Λ o del comportamiento $\Lambda_{\Sigma, 0}$ de un sistema inicializado $(\Sigma, 0)$ según sea el caso.

Dado un comportamiento Λ , si existe un sistema inicializado $(\Sigma, 0)$ tal que $\Lambda_{\Sigma, 0} = \Lambda$, se dice que Σ **realiza** el comportamiento Λ o equivalentemente Λ es **realizado** por Σ . $\lrcorner$

Al estudiar un comportamiento o sistema discreto invariante en el tiempo, la invariancia permite s.p.g. considerar únicamente controles de la forma $\omega : [0, \tau) \rightarrow \mathcal{U}$, con $\tau \in \mathbb{N}_{>0}$, ya que $\lambda^{\sigma, \mu}(\nu) = \lambda^{0, \mu-\sigma}(\mathbb{T}_{-\sigma}\nu)$ para todo $\sigma, \mu \in \mathcal{T}$, $\sigma \leq \mu$ y todo $\nu : [\sigma, \mu) \rightarrow \mathcal{U}$.

Definición 2.2.19. Sean $\mathcal{U}, \mathcal{Y}$ espacios vectoriales, $H = (H(k)) = (H_k)$, $k \in \mathbb{N}_{>0}$ una sucesión de funciones lineales $H_k : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{Y}$, y $\omega : [0, \tau) \rightarrow \mathcal{U}$ una función con $\tau \in \mathbb{N}_{>0}$. Se define el producto **convolución** (lineal) de H y ω , denotado “ $H * \omega$ ”, como

$$\begin{aligned} * : \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{Y})^{\mathbb{N}_{>0}} \times \mathcal{U}^{[0, \tau)} &\rightarrow \mathcal{Y}^{[1, \tau)} \\ (H, \omega) &\mapsto (H * \omega)(t) := \sum_{j=0}^{t-1} H(t-j)\omega(j). \end{aligned}$$

Cuando $\mathcal{U} = \mathbb{R}^m$ y $\mathcal{Y} = \mathbb{R}^p$, H es una sucesión de matrices, ya que $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p) \cong \mathbb{R}^{p \times m}$ (ver Obs. 2.2.9), este último caso es el más relevante para esta tesis. $\lrcorner$

Observación 2.2.20. De las proposiciones 2.2.14 y 2.2.17 se sigue que en un comportamiento LIT discreto con RI $\mathcal{A} = (\mathcal{A}(k))$, $k \in \mathbb{N}_{>0}$, una entrada $\omega : [0, \tau) \rightarrow \mathcal{U}$ produce un valor de salida

$$\lambda^{0, \tau}(\omega) = \sum_{j=0}^{\tau-1} \tilde{\mathcal{A}}_{\tau-j}\omega(j) = \sum_{j=0}^{\tau-1} \mathcal{A}(\tau-j)\omega(j) := (\mathcal{A} * \omega)(\tau)$$

por tanto, teniendo en cuenta la Definición 2.2.5 de función i/o (o función de salida), se concluye que para toda entrada $\omega \in \mathcal{U}^{\mathbb{N}}$, la función de salida es

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}(\omega) : \mathbb{N}_{>0} &\rightarrow \mathcal{Y} \\ t &\mapsto \bar{\lambda}(\omega)(t) := \lambda^{0, t}(\omega|_{[0, t)}) = (\mathcal{A} * \omega)(t). \end{aligned} \quad (2.23)$$

2.2.3. Sistemas lineales de tiempo continuo e invariantes en el tiempo

Sontag [30, Sec. 2.6] menciona que se busca definir sistemas gobernados por la ecuación diferencial: $\dot{x} = f(t, x, u)$ ¹⁵, donde $u \in \mathcal{U}$ espacio métrico y $x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ abierto. La primer dificultad que surge es que no se puede tomar cualquier f , pues se necesita que exista la solución para condiciones iniciales arbitrarias, así como la posibilidad de admitir controles localmente esencialmente acotados y medibles (en el caso lineal, de manera más general, se podrán admitir controles localmente integrables). Todo lo anterior motiva la definición de “lado derecho” (*right-hand side*) que cobrará mayor sentido en las proposiciones 2.2.22, 2.2.23 y se apoya en todo lo expuesto sobre EDO en §2.1.2.

Definición 2.2.21. Sea $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y $\mathcal{U}$ un espacio métrico. Un **lado derecho (LD)** con respecto a $\mathcal{X}$ y $\mathcal{U}$ es una función $f : \mathbb{R} \times \mathcal{X} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ que se puede obtener de la siguiente forma: debe existir otro espacio métrico $\mathcal{S}$, así como funciones $\tilde{f} : \mathcal{S} \times \mathcal{X} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{S}$ tales que $f(t, x, u) = \tilde{f}(\pi(t), x, u)$, y las siguientes propiedades se cumplen:

1. $\tilde{f}(s, \cdot, u)$ es de clase C^1 para cada s, u , 2. $\tilde{f}$ y la derivada parcial de $\tilde{f}$ respecto a su segunda variable (denotada $\tilde{f}_x$) son continuas en $\mathcal{S} \times \mathcal{X} \times \mathcal{U}$, 3. $\pi \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{S})$ [30, Def. 2.6.1]. $\lrcorner$

Proposición 2.2.22. Cualquier LD cumple la siguiente propiedad: para cualquier $\sigma, \tau \in \mathbb{R}$, $\sigma < \tau$, cualquier $\omega \in \mathcal{U}^{[\sigma, \tau)}$ medible y esencialmente acotada, y cualquier $x_0 \in \mathcal{X}$, existe

¹⁵Intuitivamente, esta ecuación se puede interpretar como la afirmación: “los cambios de estado del sistema en el tiempo dependen únicamente del tiempo t , los estados x del sistema y los controles u del sistema”.

$J \subset \mathcal{I} := [\sigma, \tau]$ tal que $\sigma \in J$, J es abierto relativo a $\mathcal{I}$, y existe una solución única y maximal del PVI $\dot{\xi}(t) = f(t, \xi(t), \omega(t))$, $\xi(\sigma) = x_0$ [30, Lema 2.6.2]. $\lrcorner$

Bajo las condiciones de la Proposición 2.2.22, para el caso en que $J = \mathcal{I}$, se dirá que ω es **admisibles para** x_0 . A continuación se mostrará como esta definición de “control (o entrada) admisible” coincide con la dada en la Definición 2.2.1.

Proposición 2.2.23. Sea f un LD, y sea

$$D := \{(\tau, \sigma, x, \omega) \mid \sigma \leq \tau, x \in \mathcal{X}, \omega \in \mathcal{U}^{[\sigma, \tau)} \text{ es admisible para } x\}.$$

En este conjunto se define $\phi(\tau, \sigma, x, \omega) := \xi(\tau)$, donde $\xi(t)$ es la solución (única) del PVI $\dot{\xi}(t) = f(t, \xi(t), \omega(t))$, $\xi(\sigma) = x$ evaluada en τ , y que está definida en $[\sigma, \tau]$. Entonces $\Sigma_f := (\mathbb{R}, \mathcal{X}, \mathcal{U}, \phi)$ es un sistema [30, Ej. 2.6.3]. $\lrcorner$

Prueba. Ver Prop. A.1.20 en la página 162. $\square$

Definición 2.2.24. La Proposición 2.2.22 justifica las siguientes definiciones.

- (a) Un **sistema de tiempo continuo** o simplemente **sistema continuo** (sobre $\mathbb{R}$), es un sistema del tipo Σ_f donde f es un LD. Σ_f se puede llamar “el sistema $\dot{x} = f(t, x, u)$ ”, y a f se le puede llamar “**el lado derecho de Σ** ”. También se dice que f es una **descripción local en el tiempo** de Σ [30, Def. 2.6.4].
- (b) Un **sistema continuo con salidas** es un sistema Σ con salidas cuyo sistema subyacente es un sistema continuo, $\mathcal{Y}$ es un espacio métrico, y donde la función de lectura de salida $h : \mathbb{R} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ es continua [30, Def. 2.6.5].
- (c) Sea $k \in \mathbb{N}_{>0} \cup \{\infty\}$. Un **sistema continuo de clase C^k** es un sistema continuo donde $\mathcal{U}$ es un abierto de $\mathbb{R}^m$, para algún $m \in \mathbb{N}_{>0}$, y en el cual S y $\tilde{f}$ pueden elegirse de modo que S es un abierto de un espacio Euclidiano y $\tilde{f}$ es de clase C^k . Si Σ es un sistema con salidas, se requiere en adición que $\mathcal{Y}$ sea un abierto de un espacio Euclidiano $\mathbb{R}^p$, con $p \in \mathbb{N}_{>0}$, y que $h(t, \cdot)$ sea de clase C^k para cada t [30, Def. 2.6.6]. $\lrcorner$

Se busca definir un sistema lineal continuo como un sistema del tipo $\Sigma_f = (\mathbb{R}, \mathcal{X}, \mathcal{U}, \phi)$ con $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$ y $\mathcal{U} = \mathbb{R}^m$, donde $f(t, \cdot, \cdot)$ es lineal para cada $t \in \mathbb{R}$ y además $f(\cdot, x, u) \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ para cada $(x, u) \in \mathcal{X} \times \mathcal{U}$. Entonces, de manera análoga al caso discreto (Obs. 2.2.9), $f(t, \cdot, \cdot) = f(t, \cdot, 0) + f(t, 0, \cdot)$, y así $f(t, x, u) = A(t)x + B(t)u$, donde $f(t, \cdot, 0) = A(\cdot) \in M_{n \times n}(L_{loc}^\infty(\mathbb{R}))$ y $f(t, 0, \cdot) = B(\cdot) \in M_{n \times m}(L_{loc}^\infty(\mathbb{R}))$. Sin embargo, para que esta definición “esté bien definida”, es necesario verificar el converso, es decir, dada una función $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, con $f(t, x, u) = A(t)x + B(t)u$, $A \in M_{n \times n}(L_{loc}^\infty(\mathbb{R}))$ y $B \in M_{n \times m}(L_{loc}^\infty(\mathbb{R}))$, ¿es cierto que f es un lado derecho? La siguiente proposición muestra que la respuesta a esta pregunta es afirmativa.

Proposición 2.2.25. Sean $m, n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{X} := \mathbb{R}^n$, $\mathcal{U} := \mathbb{R}^m$. Asúmase que $f(t, x, u) = A(t)x + B(t)u$, donde $A \in M_{n \times n}(L_{loc}^\infty(\mathbb{R}))$ y $B \in M_{n \times m}(L_{loc}^\infty(\mathbb{R}))$. Equivalentemente, $f : \mathbb{R} \times \mathcal{X} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{X}$ es lineal en (x, u) para cada t fija, y es localmente esencialmente acotada en t para cada (x, u) fija. Entonces f es un LD con $\tilde{f}$ de clase C^1 [30, Ej. 2.7.1]. $\lrcorner$

Prueba. Ver Prop. A.1.23 en la página 164. $\square$

Definición 2.2.26. Un **sistema continuo** Σ_f es **lineal** (y de dimensión finita, sobre $\mathbb{R}$) si es de clase $\mathcal{C}^1$ y:

1. $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$ y $\mathcal{U} = \mathbb{R}^m$, y **2.** su descripción local en el tiempo satisface que $f(t, \cdot, \cdot)$ es lineal para cada $t \in \mathbb{R}$.

Un **sistema lineal continuo con salidas** cumple además que: **1.** $\mathcal{Y} = \mathbb{R}^p$, y **2.** $h(t, \cdot)$ es lineal para cada $t \in \mathbb{R}$.

La **dimensión de Σ** es la dimensión de $\mathcal{X}$ [30, Def. 2.7.2]. $\lrcorner$

Observación 2.2.27. Al igual que el caso discreto (Obs, 2.2.9), se utiliza la expresión “el sistema $(A(t), B(t), C(t))$ ”, para denominar al sistema lineal (con salidas) Σ_f continuo con lado derecho $f(t, x, u) = A(t)x + B(t)u$ y función de lectura de salida $h(t, x) = C(t)x$. Si el sistema es invariante en el tiempo, se tiene un sistema (A, B, C) con lado derecho $f(x, u) = Ax + Bu$ y función de lectura de salida $h(x) = Cx$, para $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ y $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$. $\lrcorner$

Proposición 2.2.28.¹⁶ Todo sistema lineal continuo es completo respecto al conjunto

$$L_{loc}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m) := \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m \mid f(t) = (f_1(t), \dots, f_m(t)) \text{ y } f_i \in L_{loc}^1(\mathbb{R}) \forall i \in \overline{m}\}^{17}.$$

Además, para cualquier $\sigma, \tau \in \mathbb{R}$, $\sigma < \tau$ se cumple que $\phi(\tau, \sigma, \cdot, \cdot) : \mathcal{X} \times L^1([\sigma, \tau], \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathcal{X}$ es lineal¹⁸. $\lrcorner$

Prueba. Ver Prop. A.1.25 en la página 168. $\square$

Definición 2.2.29. Sea $\Lambda = (\mathcal{T}, \mathcal{U}, \mathcal{Y}, \lambda)$ un comportamiento.

(a) Λ es un **comportamiento de tiempo continuo** o simplemente **continuo** si:

1. $\mathcal{T} = \mathbb{R}$, **2.** $\mathcal{U}, \mathcal{Y}$ son espacio métricos y **3.** para cada $\sigma < \tau$ el dominio de $\lambda^{\sigma, \tau}$ es un abierto de $L^\infty((\sigma, \tau), \mathcal{U})$, y $\lambda^{\sigma, \tau}$ es continua [30, Def. 2.6.9].

(b) Λ es un **comportamiento lineal continuo** (sobre $\mathbb{R}$), si:

1. es completo (con respecto a los controles esencialmente acotados), **2.** $\mathcal{U} = \mathbb{R}^m$ y $\mathcal{Y} = \mathbb{R}^p$, **3.** para cada $\sigma, \tau \in \mathbb{R}$, $\sigma \leq \tau$, $\lambda^{\sigma, \sigma}(\diamond) = 0$ y la función $\lambda^{\sigma, \tau}$ es un operador lineal (acotado), y **4.** para cada $\sigma, \mu, \tau \in \mathbb{R}$, y cada $\omega \in L^\infty([\mu, \tau], \mathbb{R}^m)$ ocurre que $\lambda^{\sigma, \tau}(0 \oplus \omega) = \lambda^{\mu, \tau}(\omega)$, donde 0 es la enterada idénticamente igual a 0 en $[\sigma, \mu)$ [30, Def. 2.7.7].

(c) Sea Λ un comportamiento lineal continuo, se dice que Λ es un **comportamiento integral** si existe una función medible (llamado **kernel**) y localmente esencialmente acotada

$$\widetilde{K} : \{(\tau, \sigma) \in \mathbb{R}^2 \mid \sigma \leq \tau\} \rightarrow \mathbb{R}^{p \times m}, \text{ tal que} \quad (2.24)$$

¹⁶Esta Proposición engloba dos ejercicios del libro de Eduardo Sontag [30, Ej. 2.7.3, 2.7.5 a)], y un Lema demostrado en el mismo libro [30, Lema 2.7.4].

¹⁷También se puede definir $L_{loc}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m \mid \int_{[a, b]} \|f(t)\|_{\mathbb{R}^m} dt < \infty \text{ para todo } [a, b] \subset \mathbb{R}\}$, y esta definición es equivalente a la dada en la Proposición, esto quedará justificado por el Lema 2.3.12 (b) páginas más abajo.

¹⁸A veces se toma $\omega \in \mathcal{U}^{[\sigma, \tau]}$ o bien $\omega \in \mathcal{U}^{(\sigma, \tau]}$, esto se justifica ya que se trabaja con espacios L^p y existen isometrías biyectivas entre los espacios normados $L^p([\sigma, \tau])$, $L^p((\sigma, \tau])$, $L^p((\sigma, \tau))$ y $L^p([\sigma, \tau])$.

$$\lambda^{\sigma, \tau}(\omega) = \int_{\sigma}^{\tau} \widetilde{K}(\tau, s) \omega(s) ds \quad \forall \sigma, \tau \in \mathbb{R}, \sigma \leq \tau, \forall \omega \in L^{\infty}([\sigma, \tau], \mathbb{R}^m) \quad [30, \text{Def. 2.7.8}]. \quad (2.25)$$

Observación 2.2.30. Sea $\Sigma_f = (\mathbb{R}, \mathcal{X}, \mathcal{U}, \phi) = (\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m, \phi)$ un sistema lineal continuo con LD $f(t, x, u) = A(t)x + B(t)u$.

Considérese el caso donde el sistema Σ_f es un sistema con salidas en $\mathcal{Y} = \mathbb{R}^p$, entonces se tiene que $C(t)(\cdot) := h(t, \cdot) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$, donde h es la función de lectura de salida. En este escenario, se considera $\Lambda_{\Sigma_f, x_0} = (\mathcal{T}, \mathcal{U}, \mathcal{Y}, \lambda)$, el comportamiento del sistema inicializado (Σ, x_0) para algún $x_0 \in \mathbb{R}^n$, donde la función de respuesta λ es

$$\begin{aligned} \lambda^{\sigma, \tau}(\omega) &:= h(\tau, \phi(\tau, \sigma, x, \omega)) = C(\tau)\phi(\tau, \sigma, x, \omega) = C(\tau)\xi(\tau) \\ &= C(\tau)\Phi(\tau, \sigma)x_0 + \int_{\sigma}^{\tau} C(\tau)\Phi(\tau, s)B(s)\omega(s) ds. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Donde (2.26) se cumple por la fórmula de variación de parámetros (Prop. 2.14).

Si $x_0 = 0$, entonces $\lambda^{\sigma, \tau}(\omega) = \int_{\sigma}^{\tau} \underbrace{C(\tau)\Phi(\tau, s)B(s)}_{\widetilde{K}(\tau, s)} \omega(s) ds$. por lo que $\Lambda_{\Sigma_f, 0}$ cumple

la condición (2.25) de ser comportamiento integral (donde además se admiten controles localmente integrables), sin embargo, no es tan inmediato (en comparación con la Prop. 2.2.12) asegurar que si Σ es un sistema lineal continuo, entonces $\Lambda_{\Sigma_f, 0}$ es un comportamiento lineal continuo, la justificación de esta última afirmación se encuentra en [30, p. 46], por lo que se asume este resultado. $\lrcorner$

Proposición 2.2.31. El kernel $\widetilde{K}$ de una comportamiento integral está determinado de manera única salvo un conjunto de medida cero [30, Ej. 2.7.9]. $\lrcorner$

Prueba. Ver Prop. A.1.31 en la página 171. $\square$

Proposición 2.2.32. Si Σ_f es lineal continuo y Λ es integral, entonces

$$\Lambda_{\Sigma_f, 0} = \Lambda \iff \widetilde{K} = C(t)\Phi(t, \sigma)B(\sigma) \quad \text{p.c.t. } (t, \sigma) \in \mathbb{R}^2, t \geq \sigma.$$

Por lo tanto, el comportamiento integral Λ es realizable, si y solo si existen matrices $A(t)$, $B(t)$ y $C(t)$ tales que las condiciones de arriba se cumplen¹⁹ [30, Ej. 2.7.10]. $\lrcorner$

Prueba. Ver Prop. A.1.32 en la página 171 $\square$

Proposición 2.2.33. Un comportamiento integral Λ es invariante en el tiempo si y solo si existe una matriz de funciones localmente esencialmente acotadas

$$K \in L_{loc}^{\infty}(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}^{p \times m}), \text{ tal que } \widetilde{K}(t, \tau) = K(t - \tau) \text{ p.c.t. } \tau \leq t \quad [30, \text{Ej. 2.7.11}]. \quad (2.27)$$

Prueba. Ver Prop. A.1.33 en la página 172. $\square$

Observación 2.2.34. En adelante se trabaja con sistemas inicializados en 0. En esta tesis siempre se usará el término “comportamiento LIT continuo” como sinónimo de “comportamiento integral e invariante en el tiempo”. Cuando se hable de un “comportamiento LIT” se

¹⁹Solo se considera el caso para $t \geq \sigma$, aunque también se puede considerar el caso general $t \in \mathbb{R}$ dado que $\Phi(t, s)$ está definida p.c.t. $(t, s) \in \mathbb{R}^2$.

habla de un comportamiento LIT continuo o discreto. También en adelante solo se consideran sistemas o comportamientos LIT de dimensión finita, siempre con $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{U} = \mathbb{R}^m$ y $\mathcal{Y} = \mathbb{R}^p$. $\lrcorner$

Observación 2.2.35. De forma análoga al caso discreto, la función $K \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}^{p \times m})$ en (2.27) se denomina **respuesta al impulso** del comportamiento LIT continuo Λ , o del comportamiento $\Lambda_{\Sigma,0}$ asociado a un sistema continuo $(\Sigma_f, 0)$ LIT según sea el caso.

De las Proposiciones 2.2.28, 2.2.33, y la Definición 2.2.5 de función de salida, se sigue que para un comportamiento LIT continuo, una entrada $\omega \in L^1([0, \tau], \mathbb{R}^m)$ produce la función de salida

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}(\omega) : [0, \tau] &\rightarrow \mathbb{R}^p \\ t &\mapsto \bar{\lambda}(\omega)(t) := \lambda^{0,t}(\omega|_{[0,t]}) = \int_0^t K(t-s)\omega(s) ds. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Al igual que en el caso discreto, se trata de una **convolución** (continua), de la respuesta al impulso K con ω , denotada “ $K * \omega$ ” donde K se extiende trivialmente a $\mathbb{R}$ (en la siguiente sección se abordará con detalle esta operación). Por tanto, la función de salida $\bar{\lambda} : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}^p$ es la convolución de la entrada con la respuesta al impulso, es decir $\bar{\lambda}(\omega) = K * \omega$. $\lrcorner$

2.3. Convolución, impulso, respuesta al impulso y la matriz de transferencia

Lo mencionado en esta sección se apoya en [30, 55, 68–72].

2.3.1. La sucesión de Markov $\mathcal{A}_k = CA^k B$ y comportamientos UBIBO

Las Observaciones 2.2.20 y 2.2.35 muestran que hay una relación estrecha entre los comportamientos discretos y continuos LIT, pues en ambos casos su función de salida $\bar{\lambda}$ se caracteriza por un producto de convolución de la RI y la entrada. La relación es aún más estrecha si se consideran comportamientos realizados de dimensión finita.

Corolario 2.3.1. Sea $\Lambda_{\Sigma,0}$ el comportamiento de un sistema LIT discreto (A, B, C) , y sea Λ un comportamiento LIT discreto con RI $(\mathcal{A}_k)$, $k \in \mathbb{N}_{>0}$. Entonces Σ realiza Λ (es decir $\Lambda_{\Sigma,0} = \Lambda$) si y solo si $\mathcal{A}_{k+1} = CA^k B$ para todo $k \in \mathbb{N}$. $\lrcorner$

Prueba. Usando la Proposición 2.2.16, y tomando en cuenta que las matrices A , B y C son constantes, si $k = \tau - j$ con $j \in [\sigma, \tau] \subset \mathbb{Z}$ entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_k &= \widetilde{\mathcal{A}}_{\tau,j} = C(\tau)A(\tau-1)A(\tau-2) \dots A(j+1)B(j) = C \underbrace{AA \dots A}_{\tau-j-1 \text{ productos}} B = CA^{k-1}B. \\ \Rightarrow (\mathcal{A}_{k+1}) &= (CA^k B), \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad \square \end{aligned} \quad (2.29)$$

Para el caso continuo se tiene un resultado análogo.

Corolario 2.3.2. Sea $\Lambda_{\Sigma,0}$ el comportamiento de un sistema LIT continuo (A, B, C) , y sea Λ un comportamiento LIT continuo con RI $K \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}^{p \times m})$. Se tiene que $\Lambda_{\Sigma,0} = \Lambda$ si y solo si $K(t) = \sum_{j=0}^{\infty} CA^j B \frac{t^j}{j!}$ p.c.t. $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. $\lrcorner$

Prueba. De la Proposición 2.2.32 y el Corolario 2.1.24, se sigue que $\Lambda_{\Sigma,0} = \Lambda$ si y solo si $K(t) = Ce^{tA}B := \sum_{j=0}^{\infty} CA^j B \frac{t^j}{j!}$ p.c.t. $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Por lo tanto,

$$K(t) = \sum_{j=0}^{\infty} CA^j B \frac{t^j}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{A}_{j+1} \frac{t^j}{j!}, \text{ p.c.t. } t \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad (2.30)$$

es la RI del comportamiento asociado al sistema (A, B, C) LIT continuo, donde $\mathcal{A}_{k+1} := CA^k B$. $\square$

Nótese la similitud entre (2.29) y (2.30), en ambos casos aparece la *sucesión de Markov* $\mathcal{A}_{k+1} = CA^k B$, $k \in \mathbb{N}$. Una **sucesión de Markov** es una sucesión en el espacio de Banach $\mathbb{R}^{p \times m}$ (sucesión de matrices), con la norma mencionada en §2.1.1:

$$\|\cdot\| : \mathbb{R}^{p \times m} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad A \mapsto \max_{\{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x\|=1\}} \|Ax\|^{20}. \quad (2.31)$$

Los Corolarios 2.3.1 y 2.3.2 muestran que la teoría para la realización de sistemas LIT de dimensión finita “se reduce al mismo problema algebraico” [30, p. 50], es decir, en el caso en que se tenga una sucesión de Markov $\mathcal{A}_{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$, y se desee realizar este comportamiento, para encontrar el sistema que lo realiza, se deben encontrar matrices $A \in \mathbb{R}^{q \times q}$, $B \in \mathbb{R}^{q \times m}$ y $C \in \mathbb{R}^{p \times q}$, que cumplan que $CA^k B = \mathcal{A}_{k+1}$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y para algún $q \in \mathbb{N}_{>0}$ ²¹. En este último caso, la terna de matrices (A, B, C) se puede interpretar, o bien como un sistema LIT discreto con función de transición al siguiente estado $\mathcal{P}(x, u) = Ax + Bu$, o bien LIT continuo con lado derecho $f(x, u) = Ax + Bu$. Todo lo anterior motiva a investigar bajo que condiciones una sucesión de Markov arbitraria es realizable²².

Definición 2.3.3. Sea Λ_1 LIT continuo con función de lectura de salida λ_1 y Λ_2 LIT discreto con función de lectura de salida λ_2 .

1. Si la función de salida $\bar{\lambda}_1$ es un operador $\bar{\lambda}_1 : L^\infty(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}^m) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}^m)$ acotado (es decir existe $\gamma \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $\|\bar{\lambda}_1(\omega)\|_\infty \leq \gamma \|\omega\|_\infty$ ²³ para todo $\omega \in L^\infty(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}^m)$), entonces se dice que el comportamiento Λ_1 es **UBIBO**²⁴. Como todo operador lineal en un espacio normado es (uniformemente) continuo si y solo si es acotado, ser UBIBO es equivalente a que $\bar{\lambda}_1$ sea un operador continuo en $L^\infty(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}^m)$.
2. Si la función de salida $\bar{\lambda}_2$ es un operador $\bar{\lambda}_2 : (\ell^\infty)^m \rightarrow (\ell^\infty)^p$ ²⁵ acotado, se dice que el comportamiento (esta vez discreto) es **UBIBO**, y nuevamente esto es equivalente a pedir que $\bar{\lambda}_2$ sea continua en $(\ell^\infty)^m$.
3. Se dirá que una función $K \in M(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}^{p \times m}) := \{f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^{p \times m} \mid f \text{ es medible}\}$ es **integrable** si $\int_0^\infty \|K(t)\| dt < \infty$, donde la norma dentro de la integral es la mencionada en (2.31), esto último permite definir

²⁰Se recuerda que para $\|Ax\|$, se considera la norma euclidiana usual $\|\cdot\|_2$ en $\mathbb{R}^m$, $\|x\|_2 = \|x\| = \|(x_1, x_2, \dots, x_m)\| := (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2)^{\frac{1}{2}}$.

²¹Al mínimo $q \in \mathbb{N}$ que cumpla estos requerimientos se le denomina grado de Mc-Millan [71, Def. 1.7.7].

²²Eduardo Sontag [30] dedica buena parte de su obra a este tema.

²³Si $f \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$, se define $\|f\|_\infty := \inf\{c \in \mathbb{R} \mid \|f(t)\| \leq c \text{ p.c.t. } t \in \mathbb{R}\}$ con $\|f(x)\|$ la norma euclidiana usual para $\mathbb{R}^m$.

²⁴Uniformly bounded input bounded output.

²⁵ $(\ell^\infty)^m$ es el conjunto de todas las sucesiones (x_k) de vectores en $\mathbb{R}^m$ tales que $\|(x_k)\|_\infty := \sup_{k \geq 1} \|x_k\| < \infty$.

$$L^1(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}^{p \times m}) := \{K \in M(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}^{p \times m}) \mid f \text{ es integrable}\}.$$

4. Se dirá que una sucesión de Markov $(\mathcal{A}_j)$ **es integrable** si $\sum_{j=0}^{\infty} \|\mathcal{A}_{j+1}\| < \infty$, nuevamente la norma en cuestión es la mencionada en (2.31). $\lrcorner$

Se concluye esta sub-sección con un resultado que caracteriza un sistema UBIBO mediante la posibilidad de integrar las respuestas al impulso.

Proposición 2.3.4. *Un comportamiento Λ LIT (ya sea discreto o continuo) es UBIBO si y solo si su RI es integrable [30, Lema 7.3.1].* $\lrcorner$

2.3.2. Convolución, impulso, y obtención de la respuesta al impulso

Si se pudiera obtener la RI de un comportamiento LIT, se podría conocer la respuesta del comportamiento ante cualquier entrada admisible (mediante la convolución). Primero se aborda el caso discreto.

Definición 2.3.5. *Un **impulso** (discreto) en un tiempo $t_0 \in \mathbb{N}$, para la j_0 -ésima columna con $j_0 \in \overline{m}$, es la función $\delta_{j_0}^{t_0} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^m$, con $\delta_{j_0}^{t_0}(t_0) = e_{j_0}$ (vector canónico j_0 -ésimo en $\mathbb{R}^m$) y $\delta_{j_0}^{t_0}(t) = 0$ si $t \neq t_0$.* $\lrcorner$

Sean $t, t_0 \in \mathbb{Z}$, $t > t_0$, por la Observación 2.2.20 se tiene que

$$\bar{\lambda}(\delta_{j_0}^{t_0})(t) = (\mathcal{A} * \delta_{j_0}^{t_0})(t) = \sum_{j=0}^{t-1} \mathcal{A}(t-j) \delta_{j_0}^{t_0}(j) = \mathcal{A}(t-t_0) \delta_{j_0}^{t_0}(t_0) = \mathcal{A}(t-t_0) e_{j_0} = \mathcal{A}_{(j_0)}(t-t_0).$$

Donde $\mathcal{A}_{(j_0)}(t-t_0)$ es la j_0 -ésima columna de la matriz $\mathcal{A}(t-t_0)$. Por lo que la sucesión finita de matrices $\mathcal{A}(t), \mathcal{A}(t-1), \mathcal{A}(t-2), \dots, \mathcal{A}(2), \mathcal{A}(1)$, que corresponden a los primeros t términos de la RI, se puede obtener evaluando los impulsos $\delta_{j_0}^0, \delta_{j_0}^1, \delta_{j_0}^2, \dots, \delta_{j_0}^{t-1}$ para todo $j_0 \in \overline{m}$.

Se busca un resultado análogo para el caso continuo. En la Observación 2.2.35 quedó pendiente definir la convolución continua.

Definición 2.3.6. *Sea $K \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{p \times m})$ y $\omega \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$. Se define el **producto convolución** (continuo) de K y ω denotada “ $K * \omega$ ” como*

$$\begin{aligned} * : L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{p \times m}) \times L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m) &\rightarrow L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^p) \\ (K, \omega) &\mapsto (K * \omega)(t) := \int_{\mathbb{R}} K(t-s) \omega(s) ds. \end{aligned}$$

Se asegura que la $(K * \omega)(t)$ está bien definida p.c.t. $t \in \mathbb{R}$, para justificar esta afirmación se usan las siguientes proposiciones, cuyo enunciado y prueba se pueden consultar en la tesis *Existencia y regularidad de soluciones del problema de Poisson* [68] de Felipe García.

Proposición 2.3.7. *Sean $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, y $g \in L^q(\mathbb{R}^N)$, con $q \in [1, \infty]$.*

El producto de convolución de f y g es la función definida por

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y) g(y) dy, x \in \mathbb{R}^N \quad [68, \text{Def. 1.12}].$$

Se tienen los siguientes dos resultados. **(1)** Para casi todo $x \in \mathbb{R}^N$, la función $y \mapsto f(x-y)g(y)$ es integrable en $\mathbb{R}^N$. Además $f * g \in L^q(\mathbb{R}^N)$ y $\|f * g\|_q \leq \|f\|_1 \|g\|_q$ [68, Prop. 1.13]. **(2)** El producto convolución es conmutativo, es decir $f * g = g * f$ [68, Prop. 1.14]. $\lrcorner$

Buscando aplicar esta última proposición para $N = 1$, $q = 1$, sean $K(t) = (k_{l,j}(t)) \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{p \times m})$ y $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_m) \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$, entonces

$$\begin{aligned} (K * \omega)(t) &= \left(\sum_{j=1}^m \int_{\mathbb{R}} k_{1,j}(t - \tau) \omega_j(\tau) d\tau, \dots, \sum_{j=1}^m \int_{\mathbb{R}} k_{p,j}(t - \tau) \omega_j(\tau) d\tau \right) \\ &= \left(\sum_{j=1}^m (k_{1,j} * \omega_j)(t), \dots, \sum_{j=1}^m (k_{p,j} * \omega_j)(t) \right). \end{aligned}$$

Conmutando cada convolución de esta última expresión, usando la Prop. 2.3.7 1, y tomando en cuenta que la suma de funciones integrables es integrable, se puede asegurar que $\sum_{j=1}^m (\omega_j * k_{l,j})(t) \in L^1(\mathbb{R})$ para todo $(l, j) \in \bar{p} \times \bar{m}$ y p.c.t. $t \in \mathbb{R}$, y por tanto $K * \omega \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^p)$, con esto queda justificada la Definición 2.3.6.

Al buscar definir el impulso para el caso continuo, la pregunta que hay que responder es: ¿existe una función $\delta_i \in L^1(\mathcal{I}, \mathbb{R}^m)$, tal que $K * \delta_i = K_i$, donde K_i es la i -ésima columna de la matriz RI?, la respuesta es que no (la justificación se puede consultar en [69, Corolario 3.1.6.1]), sin embargo, es posible aproximar un intervalo $[0, T]$ de la columna K_i a través de sucesiones regularizantes (o unidades aproximadas [69, Cap. 3]).

Definición 2.3.8. Se define $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n) := \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es continua}\}$. El **soporte** de una función $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n)$ es la cerradura del conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq 0\}$. Se denota $\text{sop}(f) := \overline{\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq 0\}}$. También se denota $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n) := \{f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n) \mid \text{sop}(f) \text{ es compacto}\}$ [55, Def. 11.4].

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, se define $C_c^k(\Omega) := \mathcal{C}_c^0(\Omega) \cap C^k(\Omega)$, (conjunto de funciones $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^k$ con soporte compacto en Ω).

Una sucesión de funciones (ρ_k) se llama **sucesión regularizante** (o unidad aproximada) si, para todo $k \in \mathbb{N}$, se cumple que

$$\rho_k \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \rho_k \geq 0, \quad \text{sop}(\rho_k) \subset \overline{B}^n(0, \frac{1}{k}), \quad \text{y} \quad \int_{\mathbb{R}^n} \rho_k = 1 \quad [55, \text{Def. 14.41}]. \quad \lrcorner$$

El resultado fundamental para poder definir un impulso para el caso continuo, se toma del libro de Análisis Matemático de Mónica Clapp [55].

Teorema 2.3.9. Si $q \in [1, \infty)$ entonces, para toda $f \in L^q(\mathbb{R}^n)$ y toda sucesión regularizante (ρ_k) se cumple que $\rho_k * f \rightarrow f$ en $L^q(\mathbb{R}^n)$ [55, Teo. 14.45]. $\lrcorner$

Definición 2.3.10. Un **impulso** (continuo), para la j_0 -ésima columna con $j_0 \in \bar{m}$, es cualquier término de la sucesión $(\delta_{j_0}^k)$, $k \in \mathbb{N}$, donde $\delta_{j_0}^k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\delta_{j_0}^k(t) = (0, 0, \dots, \rho_{j_0}^k, \dots, 0)$, con $(\rho_{j_0}^k)$ sucesión regularizante. $\lrcorner$

La RI del caso continuo es una función $K \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}^{p \times m})$. Para cada $T \in \mathbb{R}_{>0}$, se define

$$K^T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{p \times m}, \quad t \mapsto K^T(t) = \begin{cases} K(t) & \text{si } t \in [0, T] \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

Por las Observaciones 2.1.8 y 2.1.12, se tiene que $K^T \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{p \times m})$. Sea $(\delta_{j_0}^k)$ un impulso con $j_0 \in \overline{m}$ fija, y $K^T = (K_{lj}^T)$, $(l, j) \in \overline{p} \times \overline{m}$ entonces

$$\bar{\lambda}(\delta_{j_0}^k)(t) = \int_{-\infty}^t K^T(t-s)\delta_{j_0}^k(s) ds^{26} = \left(\int_{-\infty}^t K_{1j_0}^T(t-s)\rho_{j_0}^k(s) ds, \dots, \int_{-\infty}^t K_{pj_0}^T(t-s)\rho_{j_0}^k(s) ds \right),$$

conmutando cada convolución en cada entrada de este último vector, y usando el Teorema 2.3.9, se llega a que

$$(\rho_{j_0}^k * K_{1j_0}^T, \dots, \rho_{j_0}^k * K_{pj_0}^T) \xrightarrow{L^1} (K_{1j_0}^T, \dots, K_{pj_0}^T), \quad (2.32)$$

es decir $\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{\lambda}(\delta_{j_0}^k) = K_{(j_0)}^T$, por tanto, la RI se puede aproximar (en un intervalo $[0, T]$) evaluando los impulsos δ_j^k para toda $j \in \overline{m}$ y para una k suficientemente grande. Si la RI es integrable (equivalente a pedir que el comportamiento es UBIBO por la Proposición 2.3.4), entonces la RI se puede aproximar por completo en $\mathbb{R}_{\geq 0}$, es decir, $\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{\lambda}(\delta_{j_0}^k) = K_{(j_0)}$ en $L^1(\mathbb{R})$.

Para el caso $p = m = 1$ el impulso es cualquier sucesión regularizante en $\mathbb{R}$. Intuitivamente, cada término de estas sucesiones toman la forma de un “tope” cerca del origen, y a medida en que aumenta k , la inclinación del tope es más pronunciada, y el ápice del tope es cada vez más alto. En la Figura 2.3 se muestran gráficas de algunos términos de la *sucesión regularizante estándar* en $\mathbb{R}$ [55, Ejemplo 14.42], la cual se define de la siguiente forma: sea $\rho(t) := \exp\left(\frac{1}{t^2-1}\right)$ si $|t| < 1$ y 0 en otro caso, sea $c := \left(\int_{\mathbb{R}} \rho(t) dt\right)^{-1}$, la sucesión regularizante estándar es la sucesión $\rho_k(t) := ck\rho(kt)$.

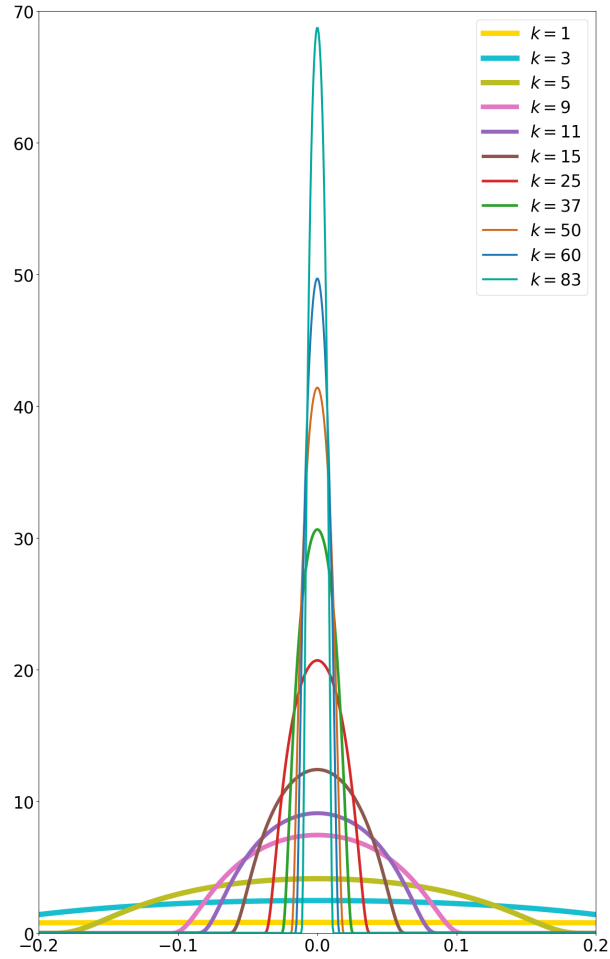


Figura 2.3: Gráficas de ρ_k para algunos valores de k (Python).

²⁶Ocurre que $(K^T * \delta_{j_0}^k)(t) := \int_{\mathbb{R}} K^T(t-s)\delta_{j_0}^k(s) ds = \int_{-\infty}^t K^T(t-s)\delta_{j_0}^k(s) ds + \int_t^{\infty} K^T(t-s)\delta_{j_0}^k(s) ds$, pues $s \in (t, \infty) \Rightarrow t-s < 0 \Rightarrow K^T(t-s) = 0$. De forma más general, para K , la RI de un comportamiento extendida trivialmente a $\mathbb{R}$ ($K(t) = 0 \forall t \in \mathbb{R}_{<0}$), y para cualquier entrada admisible $\omega : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que $\omega(t) = 0$ para todo $t > \tau$ para algún τ (el control tiene duración τ y se extiende trivialmente a $\mathbb{R}_{\geq 0}$), se tendrá que $(K * \omega)(t) = \int_{\mathbb{R}} K(t-s)\omega(s) ds = \int_0^t K(t-s)\omega(s) ds$ para todo $t \in [0, \tau]$, acorde con lo mencionado en (2.28).

2.3.3. La matriz (o función) de transferencia

La transformada de Laplace y la matriz de transferencia del caso continuo

La matriz de transferencia (que para el caso $p = m = 1$ es la función de transferencia) de un comportamiento LIT continuo Λ es la *transformada de Laplace* de la RI asociada al comportamiento.

Definición 2.3.11. [Transformada de Laplace] Sea $F \in L^1(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}^{p \times m})$, la **transformada de Laplace (TL)** de F denotada como “ $\mathcal{L}\{F\}$ ” o $\hat{F}$, es la función de variable compleja $s \in \mathbb{C}$ definida como

$$\hat{F}(s) := \int_0^\infty F(t)e^{-st} dt. \quad \text{J}$$

La TL es un operador que convierte una función de variable real $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{p \times m}$ en una función de variable compleja $\hat{F} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^{p \times m}$. En este punto se requiere del análisis complejo, así como del manejo del espacio vectorial $\mathbb{C}^{p \times m} := M_{p \times m}(\mathbb{C})$ sobre $\mathbb{C}$.

La función exponencial compleja $e^z : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, (en muchos casos) se comporta de la misma forma que el caso real: es infinitamente diferenciable en todo el plano complejo con $\frac{d}{dz}(e^z) = e^z$ y cumple que $e^{zw} = e^z e^w$ para todo $z, w \in \mathbb{C}$. La norma compleja en $\mathbb{C}$, $\|z\| = |z| = |a + bi| := (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}$ tiene la propiedad de que $|e^{ib}| = 1$, $|e^{a+ib}| = e^a$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$. La fórmula de Leonhard Euler también juega un papel crucial en la teoría:

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad [70, \text{Sec. 2.2.3}]. \quad (2.33)$$

$\mathbb{C}^{p \times m}$ es un espacio de Banach²⁷ con la norma operador (análoga a la mencionada en 2.31):

$$\|\cdot\| : \mathbb{C}^{p \times m} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad A \mapsto \max_{\{w \in \mathbb{C}^m \mid \|w\|=1\}} \|Aw\|, \quad (2.34)$$

donde, $\|w\| := \left(\sum_{j=1}^m |w_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{j=1}^m a_j^2 + b_j^2\right)^{\frac{1}{2}}$, si $w = (a_1 + bi, \dots, a_m + ib_m) \in \mathbb{C}^m$. Para $z = a + bi \in \mathbb{C}$, se conviene que $\Re(z) := a$ y $\Im(z) := b$, y se denominan parte real y parte imaginaria del número z respectivamente.

Muchos resultados para el caso real se pueden generalizar al caso complejo debido a que $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ (isomorfismo lineal, y también existe una isometría entre ambos). Una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^m$, con $f(t) = \Re f(t) + i \Im f(t)$, se puede identificar con una función $f_* : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ donde $f_*(t) = (\Re f(t), \Im f(t))$. De esta forma se justifica decir que “ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^m$ es medible” (o integrable, o continua, o diferenciable) siempre que, tanto su parte real $\Re f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ como su parte imaginaria $\Im f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ lo sean.

Lema 2.3.12. Sea $K = (k_{lr}) \in M(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{p \times m})$ con $(l, r) \in \bar{p} \times \bar{m}$. Se cumple lo siguiente:

(a) Si existe una función $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\|K(t)\| \leq g(t)$ p.c.t. $t \in \mathbb{R}$, entonces existe $c \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $|k_{lr}(t)| \leq cg(t)$ p.c.t. $t \in \mathbb{R}$, $(l, r) \in \bar{p} \times \bar{m}$. De manera inversa, si existe una función $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $|k_{lr}(t)| \leq g(t)$ p.c.t. $t \in \mathbb{R}$, entonces existe $c \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $\|K(t)\| \leq cg(t)$ p.c.t. $t \in \mathbb{R}$.

(b) $\int_{\mathbb{R}} \|K\| < \infty$ (es decir, K es integrable) si y solo si k_{lr} es integrable para toda $(l, r) \in \bar{p} \times \bar{m}$.

²⁷ $\mathbb{C}^{p \times m}$ es un espacio vectorial (sobre $\mathbb{C}$) de dimensión finita (igual a pm), por lo que es equivalente e isomorfo a $\mathbb{C}^{pm}$ (Lema 2.1.11), y como $\mathbb{C}^{pm}$ es un espacio de Banach, $\mathbb{C}^{p \times m}$ también es un espacio de Banach [55, Prop. 5.7].

- (c) Si K es integrable, entonces existe $c \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $\|\int_{\mathbb{R}} K\| \leq c \int_{\mathbb{R}} \|K\|$.
- (d) Si A_k es una sucesión en $\mathbb{C}^{p \times m}$ con $A_k = (a_{lr}^k)$ tal que $A_k \rightarrow A$ con $A = (a_{lr})$, entonces $a_{lr}^k \rightarrow a_{lr}$ para toda $(l, r) \in \bar{p} \times \bar{m}$. $\lrcorner$

Prueba. Ver Prop. A.1.34 en la página 173. $\square$

Definición 2.3.13. Sea $F \in M(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}^{p \times m})$. Se dice que F tiene **orden exponencial (OE)** σ si existen $M, \sigma \in \mathbb{R}_{>0}$ tales que $\|F(t)\| \leq M e^{\sigma t}$ p.c.t. $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. $\lrcorner$

Del Lema 2.3.12 (a), se sigue que si $F = (f_{lj}) \in M(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}^{p \times m})$, tiene OE σ si y solo si f_{lj} tiene OE σ para cada $(l, j) \in \bar{p} \times \bar{m}$.

El conjunto de funciones medibles con OE forman un subespacio vectorial de las funciones medibles en $\mathbb{R}$, y estas dan un criterio para saber en cuando está definida la TL de una función integrable.

Lema 2.3.14. Sea $F \in L^1(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}^{p \times m})$, entonces $\hat{F}$ está definida (denotado $\hat{F}(s) < \infty$) para cualquier $s \in \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) = 0\}$. Si además F tiene orden exponencial $\sigma > 0$, entonces $\hat{F}$ también está bien definida (al menos) en cualquier punto del semiplano complejo $\mathbb{C}_{\Re > \sigma} := \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > \sigma\}$. $\lrcorner$

Prueba. Ver Prop. A.1.35 en la página 174. $\square$

Un resultado inmediato es de la TL, es que se trata de una función lineal, es decir

$$\mathcal{L}\{B_1 F_1(t) + B_2 F_2(t)\}(s) = B_1 \mathcal{L}\{F_1(t)\}(s) + B_2 \mathcal{L}\{F_2(t)\}(s) \quad \forall s \in \mathbb{C}_{\Re \geq \max\{\sigma_1, \sigma_2\}},$$

para cualquier $B_1, B_2 \in \mathbb{R}^{p \times m}$ y $F_1, F_2 \in L^1(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}^{p \times m})$ con OE $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ respectivamente.

Un resultado más fuerte, muestra la existencia y el comportamiento de la derivada de la TL. Los siguientes dos teoremas se pueden encontrar en las notas de curso *Fourier Analysis* [72] de Gustaf Gripenberg.

Teorema 2.3.15. Sea $f \in L^1(\mathbb{R}_{>0})$ con orden exponencial $\sigma \in \mathbb{R}_{>0}$, entonces se cumple:

1. $\hat{f}$ es analítica en el semiplano complejo $\mathbb{C}_{\Re > \sigma}$ y $\frac{d}{ds} \hat{f}(s) = - \int_0^\infty t f(t) e^{-st} dt$ para todo $s \in \mathbb{C}_{\Re > \sigma}$ [72, Teo. 6.7].
2. Si f es diferenciable c.d., o equivalentemente, es localmente absolutamente continua, entonces $\frac{d}{ds} \hat{f}(s) = s \hat{f} - f(0)$ para todo $s \in \mathbb{C}_{\Re > \sigma}$, [72, Teo. 6.11]. $\lrcorner$

Una consecuencia de la Proposición 2.3.15, es que la TL vuelve el PVI LIT no homogéneo discutido en §2.1.2 en una ecuación algebraica de variable compleja (cuando la parte no homogénea tiene OE). De forma más particular, el interés está en las ecuaciones que gobiernan un comportamiento LIT continuo realizado por un sistema LIT continuo (A, B, C) (inicializado en 0), las cuales (por lo discutido en §2.2) son

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) = A\xi(t) + B\omega(t), & \xi(0) = 0 \\ \bar{\lambda}(\omega)(t) = C\xi(t). \end{cases} \quad (2.35)$$

$$\bar{\lambda}(\omega)(t) = C\xi(t). \quad (2.36)$$

La ecuación (2.35), frecuentemente se denomina “**representación del espacio de estados**” del sistema (A, B, C) (inicializado en 0). Por otra parte, de lo mencionado en la Observación 2.2.35 y el Corolario 2.3.2 se puede asegurar que

$$\bar{\lambda}(\omega)(t) = (K * \omega)(t), \quad (2.37)$$

donde $K(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{A}_{j+1} \frac{t^j}{j!}$, con $\mathcal{A}_{j+1} := CA^jB$, $j \in \mathbb{N}$ es la RI (definida p.c.t. $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$) del comportamiento asociado.

Se pospone trabajar con (2.37), primero se trabaja con las ecuaciones (2.35) y (2.36), concretamente se busca la TL de ambas bajo la suposición de que la entrada ω tiene OE. Se debe verificar que ξ y $\dot{\xi}$ tengan OE en este caso, pues de esta forma sus TL estarán bien definidas.

Lema 2.3.16. *El espacio normado de matrices $\mathbb{C}^{p \times m}$ (con la norma en (2.34)), cumple que $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ para todo $A, B \in \mathbb{C}^{p \times m}$. En particular se cumple $\|A^i\| \leq \|A\|^i$ para toda $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ y para toda $i \in \mathbb{N}$.* ┘

Prueba. Ver Prop. A.1.36 en la página 175. □

Lema 2.3.17. *Sea $\omega \in L^1(\mathbb{R}_{>0})$ con OE σ , entonces la solución ξ de (2.35) dada por la fórmula de variación de parámetros: $\xi(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} B \omega(\tau) d\tau$ tiene OE $\|A\|$.* ┘

Prueba. Ver Prop. A.1.38 en la página 176. □

Del Lema 2.3.17 se sigue que $\dot{\xi}(t) = A\xi(t) + B\omega(t)$ tiene OE $\max\{\|A\|, \sigma\}$ cuando ω tiene OE σ . Todo esto justifica aplicar la TL a (2.35) y (2.36), además, por el Teorema 2.3.15 2 y el hecho de que la TL es lineal, se sigue que

$$\widehat{\dot{\xi}}(s) = \widehat{(A\xi + B\omega)}(s) \Rightarrow s\hat{\xi}(s) = A\hat{\xi}(s) + B\hat{\omega}(s) \quad \text{y} \quad (2.38)$$

$$\hat{\bar{\lambda}}(\omega)(s) = C\hat{\xi}(s) \quad (2.39)$$

despejando $\hat{\xi}$ de la ecuación (2.38) (se asume que la matriz $sI - A$ es invertible), se llega a que $\hat{\xi}(s) = (sI - A)^{-1} B \hat{\omega}(s)$ y sustituyendo este valor en (2.39) se llega a que

$$\hat{\bar{\lambda}}(\omega)(s) = C(sI - A)^{-1} B \hat{\omega}(s) = W(s) \hat{\omega}(s), \quad (2.40)$$

para cualquier $s \in \mathbb{C}_{\Re > \max\{\|A\|, \sigma\}}$, donde $W(s) := C(sI - A)^{-1} B$ y donde σ es un OE de ω .

La ecuación (2.40) muestra que W caracteriza la TL de la función de salida mediante la multiplicación punto a punto. Un primer resultado sobre W es el siguiente.

Proposición 2.3.18. *La función W descrita en (2.40), es racional, es decir $W(s) = q^{-1}(s)P(s)$ para algún $P \in \mathbb{R}^{p \times m}[s]$ ²⁸ de grado $n - 1$, y para algún $p \in \mathbb{R}[s]$ mónico de grado n .* ┘

Prueba. Ver Prop. A.1.40 en la página 177. □

El hecho de que W sea una función racional es consecuencia de aplicar la TL a las ecuaciones (2.35) y (2.36).

²⁸ $\mathbb{R}^{p \times m}[s]$ es el conjunto de polinomios en s con coeficientes en $\mathbb{R}^{p \times m}$, y $\mathbb{R}[s]$ el conjunto de polinomios en s con coeficientes en $\mathbb{R}$.

Observación 2.3.19. En particular, el caso $p = 1 = m$ de la función de transferencia es un cociente de polinomios en $s \in \mathbb{C}$ con coeficientes reales, es decir

$$W(s) = \frac{\beta_1 s^{n-1} + \beta_2 s^{n-2} + \cdots + \beta_{n-1} s^1 + \beta_n}{s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} s^1 + \alpha_n}, \quad \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}. \quad (2.41)$$

Como $\mathbb{C}$ es un campo algebraicamente cerrado (teorema fundamental del álgebra), es posible factorizar los polinomios de (2.41) y así

$$W(s) = \frac{(s - R_1)(s - R_2) \cdots (s - R_{n-2})(s - R_{n-1})}{(s - r_1)(s - r_2) \cdots (s - r_{n-1})(s - r_n)}.$$

A las raíces r_i en el denominador se les llama **polos** y a las raíces R_i en el numerador **ceros**. Estos valores juegan un papel importante en la teoría para inferir características del sistema como su “estabilidad”²⁹ (ver [73, Cap. 5] o [30, Cap. 5]). Para esta tesis, solo es necesario remarcar como los polos y polos sirven para obtener el “diagrama de Bode” de la función de transferencia. Más adelante se discutirá más sobre estos diagramas, aunque se debe advertir que en esta tesis no se ahondará en su obtención a partir de la función de transferencia. $\lrcorner$

Ahora se dirige la atención a (2.37): $\bar{\lambda}(t) = (K * \omega)(t)$, primero es necesario mencionar un resultado conocido como el teorema de convolución.

Teorema 2.3.20. [de convolución] Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R}_{>0})$. Si f y g tienen orden exponencial $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ respectivamente, entonces $\widehat{(f * g)}(s) = \hat{f}(s)\hat{g}(s)$ para cualquier $s \in \mathbb{C}_{\Re > \max\{\sigma_1, \sigma_2\}}$. $\lrcorner$

Prueba. Ver Prop. A.1.45 en la página 178. $\square$

Corolario 2.3.21. [Teorema de convolución con matrices] Sean $K \in L^1(\mathbb{R}_{>0}, \mathbb{R}^{p \times m})$ y $\omega \in L^1(\mathbb{R}_{>0}, \mathbb{R}^m)$. Si K y ω tienen orden exponencial³⁰ $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ respectivamente, entonces $\widehat{(K * \omega)}(s) = \hat{K}(s)\hat{\omega}(s)$ para cualquier $s \in \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > \max\{\sigma_1, \sigma_2\}\}$. $\lrcorner$

Prueba. Ver Prop. A.1.46 en la página 180. $\square$

Del Corolario 2.3.21 y la ecuación (2.37) se sigue que

$$\widehat{\bar{\lambda}}(\omega)(s) = \hat{K}(s)\hat{\omega}(s) = \left(\widehat{\sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{A}_{j+1} \frac{t^j}{j!}} \right)(s)\hat{\omega}(s), \quad (2.42)$$

con $\mathcal{A}_{j+1} := CA^j B$, $\forall j \in \mathbb{N}$. De las ecuaciones (2.37) y (2.40) se tiene que

$$\hat{K}(s) = \left(\widehat{\sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{A}_{j+1} \frac{t^j}{j!}} \right)(s) = W(s) = C(sI - A)^{-1}B, \quad (2.43)$$

²⁹Chi-Tsong Chen explica que (en el contexto de la ingeniería eléctrica) “si un sistema no es estable, el sistema puede quemarse, desintegrarse o saturarse cuando una señal, sin importar qué tan pequeña, es aplicada” [73, p. 121]. En esta tesis no se ahondará en el concepto de estabilidad de un sistema.

³⁰ $K \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{p \times m})$ tiene orden exponencial $\sigma_1 \in \mathbb{R}_{>0}$ si cada entrada de K tiene OE σ_1 .

y esto ocurre cuando $s \in \mathbb{C}_{\Re > \max\{\|A\|, \sigma_1, \sigma_2\}}$ donde $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ son los OEs de K y ω respectivamente.

Ahora se dirige la atención a la serie en (2.43), esto ayudará a conectar el caso continuo con el caso discreto. Se busca la TL de la RI en (2.42), es decir

$$\hat{K}(s) := \int_0^\infty K(t)e^{-st} dt = \int_0^\infty \sum_{j=0}^\infty \mathcal{A}_{j+1} \frac{t^j}{j!} e^{-st} dt, \quad (2.44)$$

para ello se requiere el siguiente teorema.

Teorema 2.3.22. [de convergencia dominada en L^q] Sean $q \in [1, \infty)$ y (f_k) una sucesión en $M(\Omega)$ (ver Def. 2.1.6), tal que $f_k(x) \rightarrow f(x)$ p.c.t. $x \in \Omega$. Si existe $g \in L^q(\Omega)$ tal que $|f_k(x)| \leq g(x)$ p.c.t. $x \in \Omega$ y para todo $k \in \mathbb{N}$, entonces $f_k, f \in L^q(\Omega)$ y $\lim_{k \rightarrow \infty} \|f - f_k\|_q = 0$ [55, Teo. 13.26]. $\square$

Se busca aplicar el Teorema 2.3.22 tanto a la parte real como a la parte imaginaria de $\hat{K}$ en (2.44). Lo mencionado a continuación se apoya en [30, Sec. 7.4].

Sea $s = a + ib \in \mathbb{C}$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, sea

$$F_k : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{C}^{p \times m}, \quad F_k(t) := \sum_{j=0}^k \mathcal{A}_{j+1} \frac{t^j}{j!} e^{-st}.$$

Sean $F_k(t) = (f_{lr}^k(t))$ y $K(t)e^{-st} = (K_{lr}(t)e^{st})$, $(l, r) \in \bar{p} \times \bar{m}$.

La función e^{-st} es medible en $\mathbb{C}$ para toda $t \in \mathbb{R}_{>0}$ al igual que la función $t \mapsto t^j$ para cualquier $j \in \mathbb{N}$, por lo que su producto es medible y así la suma $\sum_{j=0}^k \tilde{a}_{lr}^{j+1} \frac{t^j}{j!} e^{-st} = f_{lr}^k(t)$ es medible (Lema 2.1.4), donde los términos $\tilde{a}_{lr}^{j+1}$, son las respectivas entradas de la matriz $\mathcal{A}_{j+1}$. Así, f_{lr}^k es medible para toda $k \in \mathbb{N}$ y toda $(l, r) \in \bar{p} \times \bar{m}$.

Por otra parte, usando propiedades de la norma, el hecho de que $|e^{a+bi}| = e^a$ y el Lema 2.3.16 se tiene que

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^k \left\| \mathcal{A}_{j+1} \frac{t^j}{j!} e^{-st} \right\| &= \sum_{j=0}^k \|C A^j B\| \frac{t^j}{j!} e^{-at} \leq \|C\| \|B\| \sum_{j=0}^k \|A\|^j \frac{t^j}{j!} e^{-at} \\ \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^k \left\| \mathcal{A}_{j+1} \frac{t^j}{j!} e^{-st} \right\| &\leq \|C\| \|B\| e^{(\|A\| - a)t} < \infty. \end{aligned}$$

Por tanto, $\sum_{j=0}^\infty \left\| \mathcal{A}_{j+1} \frac{t^j}{j!} e^{-st} \right\|$ converge en $\mathbb{R}_{>0}$, para toda $t \in \mathbb{R}_{>0}$, y como $\mathbb{C}^{p \times m}$ es un espacio de Banach, por el criterio de Weierstrass [55, Teo. 5.25], $F_k(t) \rightarrow K(t)e^{-st}$ en $\mathbb{C}^{p \times m}$ para toda $t \in \mathbb{R}_{>0}$, y por el Lema 2.3.12 (c) se sigue que $f_{lr}^k(t) \rightarrow K_{lr}(t)e^{st}$ para toda $t \in \mathbb{R}_{>0}$, toda $(l, r) \in \bar{p} \times \bar{m}$ y toda $s \in \mathbb{C}$.

Usando que $e^{-\alpha t} \in L^1(\mathbb{R}_{>0})$ si $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$, a partir de ahora, de manera más particular se considera $a \geq \|A\|$, así se puede asegurar que $g(t) := \|C\| \|B\| e^{(\|A\| - a)t} \in L^1(\mathbb{R}_{>0})$, por tanto $\|F_k(t)\| \leq g(t)$ para toda $t \in \mathbb{R}_{>0}$, y por el Lema 2.3.12 (a), existe $c \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $|f_{lr}^k(t)| < cg(t)$ para toda $t \in \mathbb{R}_{>0}$ y toda $(l, r) \in \bar{p} \times \bar{m}$.

Como tanto la parte real como la parte imaginaria de $f_{lr}^k(t)$ cumplen las hipótesis del Teorema 2.3.22, se tiene que $\Re(f_{lr}^k), \Re(K_{lr}(t)e^{st}), \Im(f_{lr}^k), \Im(K_{lr}(t)e^{st}) \in L^1(\mathbb{R}_{>0})$, y

también $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\Re(K_{lr}) - \Re(f_{lr}^k)\|_1 = 0$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\Im(K_{lr}) - \Im(f_{lr}^k)\|_1 = 0$, para todo $(l, r) \in \bar{p} \times \bar{m}$, siempre que $s \in \mathbb{C}_{\Re > \|A\|}$. Así, para toda $(l, r) \in \bar{p} \times \bar{m}$:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^\infty \Re(f_{lr}^k(t)) dt = \int_0^\infty \Re(K_{lr}(t)e^{-st}) dt \text{ y } \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^\infty \Im(f_{lr}^k(t)) dt = \int_0^\infty \Im(K_{lr}(t)e^{-st}) dt$$

$$\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^\infty F_k(t) dt = \int_0^\infty K(t)e^{-st} dt := \hat{K}(s),$$

luego, usando que $\hat{t}^j(s) := \int_0^\infty t^j e^{-st} dt = \frac{j!}{s^{j+1}}$ para todo $j \in \mathbb{N}$, se puede ver que

$$\hat{K}(s) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^\infty F_k(t) dt = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^\infty \sum_{j=0}^k \mathcal{A}_{j+1} \frac{t^j}{j!} e^{-st} dt = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^k \frac{\mathcal{A}_{j+1}}{j!} \hat{t}^j(s) = \sum_{j=0}^\infty \frac{\mathcal{A}_{j+1}}{s^{j+1}}.$$

Finalmente se ha llegado a que $\hat{K}(s) = \sum_{j=1}^\infty \mathcal{A}_j s^{-j}$ para toda $s \in \mathbb{C}_{\Re > \|A\|}$. La serie a la derecha es la *transformada Z* de la sucesión $\mathcal{A}$, más adelante se discutirá esta función, por ahora, las igualdades en (2.43) se vuelven

$$\hat{K}(s) = \sum_{j=1}^\infty \mathcal{A}_j s^{-j} = \sum_{j=1}^\infty C A^{j-1} B s^{-j} = C(sI - A)^{-1} B = W(s). \quad (2.45)$$

Si K y ω tienen orden exponencial $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ respectivamente, entonces (2.45) se cumplirá para cada $s \in \mathbb{C}_{\Re > \max\{\|A\|, \sigma_1, \sigma_2\}}$.

Observación 2.3.23. Hasta ahora se ha mostrado que para entradas ω con OE, la transformada de Laplace de la función de salida $\bar{\lambda}$ de un comportamiento Λ cumple que

$$\underbrace{\hat{\bar{\lambda}}(\omega)(s)}_{\text{TL de la función i/o}} = \underbrace{\hat{K}(s)}_{\text{Matriz de transferencia}} \underbrace{\hat{\omega}(s)}_{\text{TL de } \omega}, \quad (2.46)$$

donde $\hat{K}$ está bien definida si la RI tiene algún OE. Si además se trata de un comportamiento realizado por un sistema (A, B, C) , el resultado en (2.45) muestra que hay al menos tres maneras de expresar W en función de las matrices A, B y C : como una transformada Z , como la función $s \mapsto C(sI - A)^{-1}B$, y como una función racional. $\lrcorner$

Definición 2.3.24. Una **función sinusoidal** f , es una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(t) = \alpha \cos(2\pi\phi t + \theta)$, donde $\alpha, \phi, \theta \in \mathbb{R}$. También se conviene la siguiente terminología para los parámetros: $f(t) = \underbrace{\alpha}_{\text{amplitud}} \cos(2\pi \underbrace{\phi}_{\text{frecuencia}} t + \underbrace{\theta}_{\text{fase inicial}})$. La función $\cos(t)$ tiene periodo

2π y frecuencia (número de ciclos por unidad) $\frac{1}{2\pi}$, la función $\cos(2\pi t)$ mismo periodo y frecuencia 1, por lo que $f(t) = \alpha \cos(2\pi\phi t)$ tiene periodo $T = \frac{1}{\phi}$ y frecuencia ϕ . Al valor $2\pi\phi$ también se le llama frecuencia angular. $\lrcorner$

La relevancia de la matriz de transferencia en la teoría de sistemas LIT se podrá esclarecer con ayuda del siguiente resultado.

Proposición 2.3.25. Sea $\Lambda = (\mathcal{T}, \mathcal{U}, \mathcal{Y}, \lambda) = (\mathbb{R}, \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p, \lambda)$ un comportamiento LIT continuo UBIBO con respuesta al impulso $K = (k_{lj})$, matriz de transferencia $W = (\hat{k}_{lj})$ y función de salida $\bar{\lambda} = (\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \dots, \bar{\lambda}_p)$.

Sean $l_0 \in \bar{p}$ y $j_0 \in \bar{m}$ fijos y considérese la entrada $\omega \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_{\geq 0})$ donde

$$\omega(t) = (0, \dots, 0, \underbrace{\alpha \cos(2\pi\phi t + \theta)}_{j_0\text{-ésimo lugar}}, 0, \dots, 0),$$

para algunos $\alpha, \phi, \theta \in \mathbb{R}$. Sea $\hat{k}_{l_0 j_0}(i2\pi\phi) = re^{i\gamma}$ la entrada (l_0, j_0) de la matriz de transferencia expresada en forma polar para algunos $r, \gamma \in \mathbb{R}$. Entonces,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\bar{\lambda}_{l_0}(\omega)(t) - r\alpha \cos(2\pi\phi t + (\theta + \gamma))) = 0 \quad [30, \text{Lema 7.4.1}]. \quad \lrcorner$$

La demostración de la Proposición 2.3.25 se encuentra en [30, p. 333]³¹, sin embargo, en la Proposición A.1.49 en la página 182 se demuestra tal proposición con detalle, pues se trata de un resultado de suma importancia para la teoría de sistemas LIT (y para esta tesis).

Observación 2.3.26. La Proposición 2.3.25 evidencia lo siguiente (tomando el caso $p = 1 = m$ por simplicidad): si la función de transferencia W es tal que $W(i2\pi\phi) = re^{i\gamma}$ para algunos $r, \gamma, \phi \in \mathbb{R}$, entonces se puede asegurar que ante la entrada sinusoidal $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(t) = \alpha \cos(2\pi\phi t + \theta)$, la función de salida del comportamiento del sistema (eventualmente) será $\bar{\lambda}(f)(t) = r\alpha \cos(2\pi\phi t + (\theta + \gamma))$. Por lo tanto, ante una entrada sinusoidal con frecuencia ϕ , en la función de salida del comportamiento únicamente se verá afectada la fase y amplitud de la entrada, mientras que la frecuencia ϕ quedará intacta; los cambios de fase inicial y amplitud se obtienen evaluando la función de transferencia W en la frecuencia compleja ϕ (es decir $W(i2\pi\phi)$) de la entrada original y expresándola en forma polar. \lrcorner

La última pieza faltante para esclarecer por completo la importancia de la matriz de transferencia es el análisis armónico, en la siguiente sección se abordará este tema. Se concluye esta sub-sección discutiendo brevemente la matriz de transferencia para el caso discreto.

La transformada Z y la matriz de transferencia del caso discreto

Lo mencionado en este apartado se apoya principalmente en [71]. Para el caso continuo, se definió la matriz de transferencia como la TL de la RI, mientras que, para el caso discreto la matriz de transferencia se define como la transformada Z de la RI.

Definición 2.3.27. Sea $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_k)$, $k \in \mathbb{N}$ una sucesión en $\mathbb{R}^{p \times m}$. La **transformada Z (TZ)** de $\mathcal{A}$ (denotada $\hat{\mathcal{A}}$) es la función de variable compleja $s \in \mathbb{C}$ definida como

$$\hat{\mathcal{A}}(s) := \sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{A}_j s^{-j}. \quad \lrcorner$$

³¹Hay una diferencia entre el enunciado de [30, Lema 7.4.1] y la Prop. 2.3.25: Sontag utiliza el control $\omega(t) = \sin(\phi t)v_{j_0}$ donde v_{j_0} es el j_0 -ésimo vector canónico en $\mathbb{R}^m$, y así el enunciado asegura que $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\lambda}(\omega)(t)_{l_0} - r \sin(\phi t + \gamma) = 0$; el caso para el control $\omega(t) = \alpha \cos(2\pi\phi t + \theta)v_{j_0}$ como se considera en esta tesis también se cumple y la prueba es análoga.

Un comportamiento LIT discreto realizado por un sistema LIT discreto (A, B, C) inicializado en 0 se describe mediante las ecuaciones (Obs 2.2.9)

$$\begin{cases} \mathcal{P}(x(t), u(t)) = x(t+1) = Ax(t) + Bu(t), & x(0) = 0 \\ \bar{\lambda}(u)(t) = Cx(t). \end{cases} \quad (2.47)$$

Las igualdades (2.47) y (2.48) son ecuaciones que relacionan: 1. una sucesión de estados $x(t)$ (sucesión de vectores en $\mathbb{R}^n$), $t \in \mathbb{N}$, con 2. una entrada $u(t)$, $t \in \mathbb{N}$ (sucesión de vectores en $\mathbb{R}^m$). La ecuación (2.47) es una *ecuación de diferencias*. La igualdad $\mathcal{P}(x, u) = x(t+1)$ ocurre porque la función $\mathcal{P}$ de transición al siguiente estado se definió (ver (2.19)) como la función de transición evaluada en el tiempo inicial $t \in \mathbb{N}$, tiempo final $t+1$, en el estado $x(t) \in \mathbb{R}^n$ y entrada $\omega_u(t)$, donde $\omega_u(t) = u(t) \in \mathcal{U}$, es decir, $\mathcal{P}(x, u) := \phi(t+1, t, x, \omega_u) = x(t+1)$.

De manera completamente análoga a como se hizo en el caso de la TL, aplicando la TZ a (2.47) se tiene $\sum_{k=0}^{\infty} x(k+1)s^{-k} = A\hat{x}(s) + B\hat{u}(s)$ (la TZ es lineal), luego, el lado izquierdo de esta última igualdad cumple que

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} x(k+1)s^{-k} &= \lim_{N \rightarrow \infty} s \sum_{k=0}^N x(k+1)s^{-k-1} \underbrace{=}_{-k-1=-r} s \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{r=0}^N x(r)s^r = s\hat{x}(s) \\ \therefore s\hat{x}(s) &= A\hat{x}(s) + B\hat{u}(s) \Rightarrow \hat{x}(s) = (sI - A)^{-1}B\hat{u}(s) \end{aligned}$$

donde se asume que $(sI - A)$ es invertible, de esto último y (2.48) se sigue que

$$\hat{\bar{\lambda}}(u)(s) = C(sI - A)^{-1}B\hat{u}(s). \quad (2.49)$$

Por otro lado, por la Obs. 2.2.20 y el Corolario 2.3.1, también se tiene que

$$\bar{\lambda}(u)(t) = (\mathcal{A} * u)(t), \quad (2.50)$$

donde $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_{j+1}) = (CA^jB)$, $j \in \mathbb{N}$ es la RI del comportamiento.

Se tiene un resultado análogo al teorema de convolución (Prop. 2.3.20) para el caso discreto con la TZ.

Proposición 2.3.28. [Teorema de convolución (discreta)] Sean $f(t)$ y $u = (u_t) = u(t)$, $t \in \mathbb{N}$ sucesiones en $\mathbb{R}$. Si $s \in \mathbb{C}$ es tal que $\hat{f}(s) < \infty$ y $\hat{u}(s) < \infty$ en $\mathbb{R}$, entonces $\widehat{(f * u)}(s) = \hat{f}(s)\hat{u}(s)$. J

Prueba. Ver Prop. A.1.50 en la página 183. □

Corolario 2.3.29. [Teorema de convolución (discreta) con matrices] Sea $\mathcal{A}(t)$, una sucesión en $\mathbb{R}^{p \times m}$, y $u(t)$, una sucesión en $\mathbb{R}^m$. Si $s \in \mathbb{C}$ es tal que $\hat{\mathcal{A}}(s) < \infty$ y $\hat{u}(s) < \infty$, entonces $\widehat{(\mathcal{A} * u)}(s) = \hat{\mathcal{A}}(s)\hat{u}(s)$. J

Prueba. Ver Prop. A.1.51 en la página 184. □

De este último Corolario y de (2.50) se sigue que $\hat{\bar{\lambda}}(u)(s) = \widehat{(\mathcal{A} * u)}(s) = \hat{\mathcal{A}}(s)\hat{u}(s)$, y de esto último y (2.49) se sigue que la matriz de transferencia W para el caso discreto es

$$\hat{\mathcal{A}}(s) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{A}_j s^{-j} = \sum_{j=1}^{\infty} CA^{j-1}Bs^{-j} = C(sI - A)^{-1}B = W(s). \quad (2.51)$$

Se ha llegado al mismo resultado del caso continuo. Nuevamente se observa una estrecha relación entre ambos casos, pues las ecuaciones (2.45) y (2.51) muestran que la matriz de transferencia es la misma tanto en el caso continuo como el discreto. Todo lo desarrollado desde la ecuación (2.44) hasta (2.45), muestra que la transformada de Laplace de la RI del comportamiento que realiza un sistema LIT continuo (A, B, C) es la transformada Z del comportamiento que realiza un sistema LIT discreto (A, B, C) .

2.4. Relación con el análisis de Fourier y el muestreo

El análisis de Fourier y la transformada de Fourier (estrechamente relacionada con la transformada de Laplace) son imprescindibles para la teoría de sistemas LIT. Esta sección busca exponer las relación más importantes entre lo previamente expuesto y el análisis de Fourier. También se buscará explicar el concepto de muestreo, que es un medio para transitar de un comportamiento LIT continuo a uno discreto. Esta sección se apoya en [30, 55, 56, 69, 72, 74–77].

2.4.1. El teorema de Fourier y la importancia de la función de transferencia

Un **espacio de Hilbert** es un espacio vectorial $\mathcal{H}$ (sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) equipado con un producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{K}$, que además es completo con la norma inducida ($\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$).

En un espacio vectorial V (sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) de dimensión infinita, no es posible ver cada elemento de V como la combinación lineal de elementos de un subconjunto de V de cardinalidad finita, sin embargo, si V es un espacio de Hilbert, es posible definir una *base de Hilbert*, que es un concepto análogo al de una base de un espacio vectorial de dimensión finita (base de Hamel).

Definición 2.4.1. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $U \subset \mathcal{H}$. Se define el conjunto

$$\text{lin}(U) := \left\{ \sum_{j=0}^m \alpha_j u_j \mid \alpha_j \in \mathbb{R}, u_j \in U, m \in \mathbb{N} \right\},$$

que es el subespacio vectorial generado por U . Se dirá que U es una **base de Hilbert** de $\mathcal{H}$ si U es ortonormal³² y $\text{lin}(U)$ es denso en $\mathcal{H}$ (es decir, $\mathcal{H} = \overline{\text{lin}(U)}$) [55, Def. 15.2]. ┘

El siguiente teorema (cuya prueba se puede consultar en *Applied Analysis* [74], de John Huner y Bruno Nachtergaele), muestra distintas caracterizaciones de una base de Hilbert indexada por un conjunto I , cuya cardinalidad puede ser infinito numerable o no numerable.

Teorema 2.4.2. Sea $U = \{u_j \mid j \in I\}$ un conjunto ortonormal de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

³²Si $\langle u, v \rangle = 0$ para todo $u, v \in U$ tales que $u \neq v$, se dice que U es un *conjunto ortogonal*.

Si U es un conjunto ortogonal y además cumple que $\|u\| = 1$ para todo $u \in U$, se dice que U es un *conjunto ortonormal*.

- (a) $\langle u_j, x \rangle = 0$ para toda $j \in I$, entonces $x = 0$, (b) $x = \sum_{j \in I} \langle u_j, x \rangle u_j$ para toda $x \in \mathcal{H}$ ³³,
 (c) $\|x\|^2 = \sum_{j \in I} |\langle u_j, x \rangle|^2$ para toda $x \in \mathcal{H}$ ³⁴, (d) $\mathcal{H} = \overline{\text{lin}(U)}$, ($\mathcal{H}$ es una base de Hilbert), y
 (e) U es un conjunto ortonormal maximal, en otras palabras, si $V \subset \mathcal{H}$ es tal que $U \subset V$ y $|U| < |V|$, entonces V no es ortonormal [74, Teo. 6.26]. $\lrcorner$

Por este último teorema, es posible encontrar la definición de base de Hilbert como un conjunto ortonormal U (numerable) que cumple el inciso (b) del Teorema 2.4.2 (ver por ejemplo [56, Def. 16.3.6]).

Definición 2.4.3. Sea $\mathcal{H}$ un espacio vectorial con producto escalar sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Sea $U = \{u_j \mid j \in \mathbb{N}\}$ un conjunto ortogonal de $\mathcal{H}$ y $x \in \mathcal{H}$.

1. La **serie de Fourier de x** (respecto a U) es la serie $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\langle u_j, x \rangle}{\|u_j\|} u_j$.
2. El k -ésimo **coeficiente de Fourier de x** (relativo a U) denotado $c_k(x)$, es el término $c_k(x) := \frac{\langle u_k, x \rangle}{\|u_k\|}$ [56, Def. 16.3.3]. $\lrcorner$

De esta forma, lo que afirma el Teorema 2.4.2 (b) (para el caso en que $I = \mathbb{N}$), es que si $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert y $U \subset \mathcal{H}$ es una base de Hilbert, entonces la serie de Fourier (respecto a U) de todo elemento de $x \in \mathcal{H}$ converge a x en $\mathcal{H}$.

El interés está en el caso particular de las funciones periódicas y cuadrado integrables que toman valores en los complejos:

$$L_p^2(0, T) := \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ tiene periodo } T \in \mathbb{R}_{>0} \text{ y } \int_0^T |f(t)|^2 dt \leq \infty \right\} \subset L_{loc}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}).$$

$L_p^2(0, T)$ es un espacio de Hilbert con el producto escalar $\langle f, g \rangle := \int_{t_0}^{t_0+T} \bar{f}g$ [74, Ejemplo 16.1.6]. El teorema de Fourier (cuya prueba se puede consultar en *Fourier Analysis and Applications* [56] de Claude Gasquet y Patrick Witomski) se puede enunciar en los siguientes términos.

Teorema 2.4.4. [de Fourier] El conjunto

$$\left\{ \sqrt{\phi} e^{i2\pi\phi kt} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ \sqrt{\phi} \cos(2\pi\phi kt) + i\sqrt{\phi} \sin(2\pi\phi kt) \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \left(\phi := \frac{1}{T} \right)$$

es una base de Hilbert del espacio $L_p^2(0, T)$ [56, Teo. 16.3.9]. $\lrcorner$

Del Teorema 2.4.4 y la equivalencia (b) del Teorema 2.4.2 se sigue que

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f) \sqrt{\phi} e^{i2\pi\phi kt} \quad \forall f \in L_p^2(0, T) \quad (2.52)$$

³³En este caso, como I no necesariamente es numerable, la convergencia de una serie con la forma $x = \sum_{j \in I} x_j$ significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe un conjunto $J_\varepsilon \subset I$ tal que $\left\| \sum_{j \in J} x_j - x \right\| < \varepsilon$ para cualquier conjunto finito $J \subset I$ tal que $J_\varepsilon \subset J$ [74, Def. 6.20]. Si $I = \mathbb{N}$, entonces esta definición implica la definición de convergencia de series usual.

³⁴Este resultado se conoce como la identidad de Parseval. Si U únicamente es ortogonal, se puede asegurar (al menos) que $\sum_{j \in I} |\langle u_j, x \rangle|^2 \leq \|x\|^2$, resultado conocido como desigualdad de Bessel [74, Teo. 6.24].

donde $c_k(f) := \sqrt{\phi} \int_0^T f(t) e^{-i2\pi\phi kt} dt$ son los coeficientes de Fourier de f . La expresión en (2.52) es de las versiones más conocida del teorema de Fourier.

Los elementos de la base de Hilbert de $L_p^2(0, T)$ (sin normalizar) son las funciones $f_k(t) = e^{2\pi\phi kt}$, que toman valores en el círculo unitario centrado en el origen del plano complejo. La gráfica $G(f_k) := \{(t, f_k(t)) \mid t \in \mathbb{R}\}$ es una espiral en $\mathbb{R} \times \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^3$, y las gráficas de las partes (o proyecciones) reales e imaginarias de f_k son $G(\Re f_k) = \{(t, \cos(2\pi\phi kt)) \mid t \in \mathbb{R}\}$ y $G(\Im f_k) = \{(t, \sin(2\pi\phi kt)) \mid t \in \mathbb{R}\}$. En la Figura 2.4, se muestra como la espiral $G(f_k)$ da lugar a las gráficas $G(\Re f_k)$ (coseno) y $G(\Im f_k)$ (seno).

El caso de interés para esta tesis, es cuando f toma únicamente valores en los reales, es decir cuando

$$f \in \Re L_p^2(0, T) := \{f \in L_p^2(0, T) \mid \Im(f(t)) = 0 \forall t \in \mathbb{R}\} \quad (2.53)$$

Suponiendo $f \in \Re L_p^2(0, T)$, usando la imparidad del seno y la paridad del coseno se observa que

$$\overline{c_k(f)} = \sqrt{\phi} \left(\underbrace{\int_0^T f(t) \cos(2\pi\phi kt) dt}_{a_k} + i \underbrace{\int_0^T f(t) \sin(2\pi\phi kt) dt}_{b_k} \right) = \sqrt{\phi} \int_0^T f(t) e^{i2\pi\phi kt} dt = c_{-k}(f),$$

por tanto $\overline{c_k(f)} = c_{-k}(f)$ y también $c_k(f) = \sqrt{\phi}(a_k - ib_k)$ para toda $k \in \mathbb{N}$, luego, de (2.52) se sigue que

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{\phi} \left(c_k(f) e^{i2\pi\phi kt} + \underbrace{c_{-k}(f) e^{-i2\pi\phi kt}}_{= \overline{c_k(f)} e^{i2\pi\phi kt}} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{\phi} 2\Re \left(c_k(f) e^{i2\pi\phi kt} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(2\pi\phi kt) + B_k \sin(2\pi\phi kt). \end{aligned} \quad (2.54)$$

donde $A_k := 2\phi a_k$ y $B_k := 2\phi b_k$. La expresión en (2.54) es equivalente a la expresión $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \cos(2\pi\phi kt + \theta_k)$, donde $\alpha_k := \sqrt{A_k^2 + B_k^2}$ y $\theta_k := -\arctan2(B_k, A_k)$ ³⁵, pues usan-

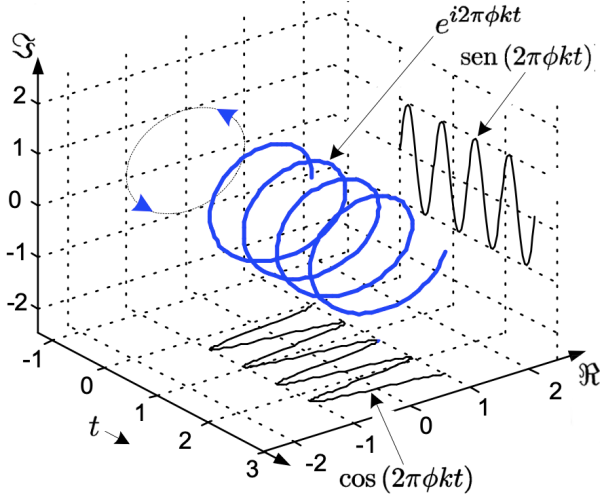


Figura 2.4: Gráfica de $f_k(t) = e^{i2\pi\phi kt}$ para $t \in [0, 3]$ y algún $\phi k \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Figura adaptada de [75, Fig. 5].

³⁵Se define $\arctan2 : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ donde $\arctan2(y, x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{si } x < 0 \text{ y } y \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & \text{si } x < 0 \text{ y } y < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } x = 0 \text{ y } y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x = 0 \text{ y } y < 0 \end{cases}$,

esta función es una modificación de la función $\arctan(\frac{y}{x})$ para que sea posible obtener el ángulo correcto del

do las identidades $\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$, $\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ y $\sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ (se toma el caso $\arctan_2(y, x) = \arctan(yx^{-1})$, los demás casos son análogos), se tiene que

$$\begin{aligned} \alpha_k \cos(2\pi\phi kt + \theta_k) &= \alpha_k \left(\cos(2\pi\phi kt) \cos\left(-\arctan\left(\frac{B_k}{A_k}\right)\right) - \sin(2\pi\phi kt) \sin\left(-\arctan\left(\frac{B_k}{A_k}\right)\right) \right) \\ &= \alpha_k \left(\cos(2\pi\phi kt) \left(\frac{A_k}{\sqrt{A_k^2 + B_k^2}}\right) + \sin(2\pi\phi kt) \left(\frac{B_k}{\sqrt{A_k^2 + B_k^2}}\right) \right) = A_k \cos(2\pi\phi kt) + B_k \sin(2\pi\phi kt). \end{aligned}$$

Así, en efecto (2.54) es equivalente a

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \cos(2\pi\phi kt + \theta_k). \quad (2.55)$$

Por tanto, toda función $f \in \mathcal{RL}_p^2(0, T)$ ³⁶ se puede “descomponer” en funciones sinusoidales, las cuales varían en amplitud α_k y fase θ_k , pero su frecuencia siempre es múltiplo entero positivo de ϕ (a ϕ también se le llama *frecuencia fundamental*). Se debe enfatizar en esta posibilidad de descomponer una función (cuadrado integrable) de duración finita y codominio real en funciones sinusoidales (o “frecuencias”) proporcionada por el teorema de Fourier, pues jugará un papel crucial en lo que resta de esta tesis.

El resultado en (2.55) es la pieza faltante para ilustrar la importancia de la función (o matriz) de transferencia. Sea Λ un comportamiento LIT continuo UBIBO con $m = 1 = p$, respuesta al impulso K y función de salida $\bar{\lambda}$. Sea $f \in \mathcal{RL}_p^2(0, T) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, de este modo f es una entrada admisible para Λ , y para $N \in \mathbb{N}$ lo suficientemente grande se puede asegurar que $f(x) \approx \sum_{k=0}^N \alpha_k \cos(2\pi\phi kx + \theta_k)$, y como $\bar{\lambda}$ es lineal, se tiene que

$$\bar{\lambda}(f(x))[t] \approx \sum_{k=0}^N \bar{\lambda}\left(\underbrace{\alpha_k \cos(2\pi\phi kx + \theta_k)}_{:=\omega_k(x)}\right)[t] = \sum_{k=0}^N \bar{\lambda}(\omega_k(x))[t] =: \tilde{\lambda}_N(f(x))[t], \quad (2.56)$$

de este modo $\tilde{\lambda}_N(f(x))[t]$ es una aproximación (en la norma L^2) de $\bar{\lambda}(f)$ a través de una suma de N evaluaciones de la función de salida en las funciones sinusoidales $\omega_k(x) = \alpha_k \cos(2\pi\phi kx + \theta_k)$. Luego, la Proposición 2.3.25 asegura que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\bar{\lambda}(\omega_k(x))(t) - r_k \alpha_k \cos(2\pi\phi kt + (\theta_k + \gamma_k))) = 0 \quad \forall k \in \{1, \dots, N\}. \quad (2.57)$$

donde $\omega_k(x) = \alpha_k \cos(2\pi\phi kx + \theta_k)$, y donde r_k, γ_k son tales que $\hat{K}(i2\pi\phi k) = r_k e^{i\gamma_k}$, y por tanto, de (2.57) se sigue que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\lambda}_N(f)(t) - \sum_{k=0}^N r_k \alpha_k \cos(2\pi\phi kt + \theta_k + \gamma_k) = 0. \quad (2.58)$$

vector (x, y) en función del cuadrante en el que se encuentra, pues con la función $\arctan$ ocurre, por ejemplo: $\arctan(\frac{x}{y}) = \arctan(\frac{-x}{-y})$ sin embargo el ángulo correcto del vector $(-x, -y)$ es $\arctan(\frac{x}{y}) - \pi$. Esta función está definida de modo que $\arctan_2(y, x) = \arg(z) = \varphi$ donde $z = x + iy = re^{i\varphi} \in \mathbb{C}$.

³⁶O toda función cuadrado integrable definida en un intervalo finito $[0, T) \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$, extendida periódicamente a todo $\mathbb{R}$.

Observación 2.4.5. Los resultados en (2.56) y (2.58) muestran que ante una entrada de duración finita $f \in L^2([0, T]) \cap L^\infty([0, T])$ ³⁷, para poder construir/inferir la función de salida (aproximada) del comportamiento Λ ante f , basta conocer: (1) los coeficientes reales de Fourier $A_k, B_k \in \mathbb{R}$ de f y (2) los valores $r_k, \gamma_k \in \mathbb{R}$ dados por la función de transferencia a través de la evaluación $\hat{K}(i2\pi\phi k) = r_k e^{i\gamma_k}$, (para $k \in \{1, \dots, N\}$ y con N suficientemente grande), pues de esta forma, dicha salida aproximada (denotada $\tilde{\lambda}_N(f)(t)$), se puede reconstruir mediante $\tilde{\lambda}_N(f)(t) = \sum_{k=0}^N r_k \alpha_k \cos(2\pi\phi kt + \theta_k + \gamma_k)$. Por tanto, la función (o matriz) de transferencia provee la información necesaria (a través de cambios en amplitud y fase) para conocer en qué medida cada frecuencia de la descomposición de Fourier de una entrada admisible es afectada por el comportamiento Λ . $\lrcorner$

Además de esta última observación, vale la pena mencionar que se cumple que

$$\bar{\lambda}(f(x)) = \bar{\lambda} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \cos(2\pi\phi kx + \theta_k) \right) = {}^{38} \sum_{k=0}^{\infty} \bar{\lambda}(\alpha_k \cos(2\pi\phi kx + \theta_k)) =: \lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{\lambda}_N(f(x)).$$

Y en el caso donde la convergencia de $\lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{\lambda}_N(f)$ y $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N \underbrace{r_k \alpha_k \cos(2\pi\phi kt + \theta_k + \gamma_k)}_{:= u_k(t)}$ sea uniforme, entonces se puede asegurar que

$$0 = \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\lambda}_N(f)(t) - \sum_{k=0}^N u_k(t) = {}^{39} \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{\lambda}_N(f)(t) - \sum_{k=0}^N u_k(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\lambda}(f)(t) - \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t).$$

2.4.2. La transformada de Fourier

Definición 2.4.6. Sea $F \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{p \times m})$ ⁴⁰, la **transformada de Fourier (TF)** de F denotada como “ $\mathcal{F}\{F\}$ ” es la función de variable real $\xi \in \mathbb{R}$ definida como

$$\mathcal{F}(F)(\xi) := \int_{\mathbb{R}} F(t) e^{-i2\pi\xi t} dt. \quad \lrcorner$$

La TF está muy relacionada con lo mencionado en la Observación 2.4.5, ya que provee “información” sobre el contenido espectral de una función integrable, concretamente, muestra “como se distribuyen” las frecuencias que componen la función en cuestión.

La TF también está relacionada con los coeficientes de Fourier mencionados en (2.52). En la obra *A Friendly Guide to Wavelets* [76, Cap. 1] Gerald Kaiser da una explicación heurística de la procedencia de la TF: se considera $c_k(f)$ el k -ésimo coeficiente de Fourier de una función f sin ser normalizado y relativo al conjunto $\{e^{i2\pi\phi kt} | k \in \mathbb{Z}\}$, que corresponde a la base de Hilbert de $L_p^2(0, T)$ del Teorema 2.4.4 (también sin ser normalizada): $c_k(f) = \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i2\pi\phi kt} dt$, luego se considera la función $\mathcal{F}(f_T)(\xi) := \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i2\pi\xi t} dt$, que corresponde a $c_k(f)$, donde se hace variar el valor ϕk (frecuencia) considerándolo como

³⁷Se enfatiza que teóricamente se considera f extendida periódicamente a todo $\mathbb{R}$ con periodo T .

³⁸La igualdad se debe a que $\bar{\lambda}$ es continua en $L^\infty(\mathbb{R}_{>0})$ (ver Def. 2.3.3 1).

³⁹El poder intercambiar los límites se debe a la convergencia uniforme (ver por ejemplo, [59, Prop. 3.3.3]).

⁴⁰Se requiere $F \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{p \times m})$, pues $f \in L^1(\mathbb{R}) \iff \infty > \int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt = \int_{\mathbb{R}} |f(t) e^{-i2\pi\xi t}| dt$.

una variable libre ξ , dando lugar a la función $\mathcal{F}(f_T)(\xi)$, que depende de T y ξ . El último paso para llegar a la TF es tomar el límite $T \rightarrow \infty$, pues $\lim_{T \rightarrow \infty} \mathcal{F}(f_T)(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi)$.

Se debe enfatizar como la variable libre ξ se sustituye por el término ϕk (correspondiente a la sucesión de frecuencias de los coeficientes de Fourier de f), ya que esto motiva la terminología “dominio frecuencia”, pues los valores ξ que toma la TF: $\mathcal{F}(f)(\xi)$, se interpretan como las frecuencias de una función sinusoidal.

El siguiente teorema encontrado en el libro de Gasquet y Witomski [56] ilustra la estrecha relación entre $f(t)$ y $\mathcal{F}(f)(\xi)$ siempre que $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, donde

$$L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) := \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ es medible y } \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt < \infty \right\} \supset L^2(\mathbb{R}).$$

Teorema 2.4.7. *Para toda $f, g \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ se cumple*

$$(a) \mathcal{F}(\overline{\mathcal{F}(f)}) = \overline{\mathcal{F}(\mathcal{F}(f))} = f \text{ c.d.}$$

$$(b) \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{g(t)} dt = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f)(\xi) \overline{\mathcal{F}(g)(\xi)} d\xi, \text{ es decir } \langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})} = \langle \mathcal{F}(f), \mathcal{F}(g) \rangle_{L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})}.$$

$$(c) \|f\|_{L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})} = \|\mathcal{F}(f)\|_{L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})}, \text{ es decir } \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}(f)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \text{ [56, Teo. 22.1.4].}$$

Este último resultado es muy revelador en el siguiente sentido: la transformada de Fourier es un operador (lineal) $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, con inverso, unitario (preserva el producto escalar), y es una isometría (preserva normas y por ende distancias). El resultado en el inciso (c) se conoce como teorema de Plancherel. Esto último ayuda a justificar que *hay dos maneras equivalentes, de ver una función en $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ o $f \in L^2(\mathbb{R})$: (1) desde el dominio del tiempo correspondiente a $f(t)$, y (2) desde el dominio de la frecuencia correspondiente a $\mathcal{F}(f)(\xi)$.*

La TF resulta ser un caso particular de la TL, cuando $f \in L^1(\mathbb{R})$ es tal que $f(t) = 0$ si $t < 0$, ya que en este caso $\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_0^\infty f(t) e^{-i2\pi\xi t} dt = \mathcal{L}(f)(i2\pi\xi)$, es decir, $\mathcal{F}(f) = \mathcal{L}(f)|_{\mathcal{D}}$, donde $\mathcal{D} := \{a + ib \in \mathbb{C} \mid a = 0, b = 2\pi\xi, \xi_{\geq 0} \in \mathbb{R}\}$. Por tanto, la TF cumple los mismos resultados que se mostraron para la TL páginas arriba. De manera recíproca, la TL de una función $f \in L^1(\mathbb{R})$ se puede ver como la TF de una función g que depende de f (ver [72, Sec. 6.3]).

Observación 2.4.8. *En la Prop. 2.3.25 (mencionada nuevamente en (2.57)) únicamente se contemplan los valores $\hat{K}(i2\pi\xi) = W(i2\pi\xi) = \mathcal{L}(K)(i2\pi\xi) = \mathcal{F}(K)(\xi)$ para $\xi \in \mathbb{R}$, es decir, la transformada de Fourier de la RI del comportamiento es suficiente para conocer los parámetros r_k, ω_k de la Obs. 2.4.5. A $\mathcal{F}(K)(\xi) = \mathcal{L}(K)(i2\pi\xi)$ también se le suele llamar **función de transferencia sinusoidal**, y a partir de las funciones $\xi \mapsto |W(i2\pi\xi)|$ (frecuencia vs. amplitud) y $\xi \mapsto \arg(W(i2\pi\xi))$ (frecuencia vs. fase) se pueden obtener los diagramas de Bode [23, Sec. 3.4], los cuales tienen la propiedad excepcional de proveer (visualmente) una idea general del comportamiento de un sistema ante frecuencias arbitrarias. Usualmente, la unidad de magnitud de la fase es grados y la unidad de magnitud de la amplitud es alguna unidad de intensidad física en decibelios. El diagrama de Bode asociado a la función $\xi \mapsto |W(i2\pi\xi)|$ se conoce comúnmente como “respuesta en frecuencia”*

o “respuesta en magnitud”. También es posible considerar la gráfica tridimensional (o coloreado de dominios) correspondiente a frecuencia vs. fase vs. amplitud, es decir el diagrama de Bode asociado a $\xi \mapsto (\arg(W(i2\pi\xi)), |W(i2\pi\xi)|)$, o incluso incluir el factor tiempo, por ejemplo tiempo vs. frecuencia vs. amplitud etc. En esta tesis no se ahondará en los detalles para obtener el diagrama de Bode a partir de las funciones $\xi \mapsto |W(i2\pi\xi)|$ o $\xi \mapsto \arg(W(i2\pi\xi))$. $\lrcorner$

La relación tiempo-frecuencia es muy peculiar por lo siguiente: el estudio de una función/señal se suele realizar tomando un segmento temporal finito de esta, dicho segmento se denomina *ventana*. Grosso modo, resulta que, entre mayor sea la longitud de la ventana en el dominio tiempo, habrá mayor información sobre el contenido espectral en la ventana, *pero no será posible inferir en qué momento ocurrieron tales frecuencias presentes en el espectro*, de manera contraria, si se toma una ventana de longitud menor en el dominio tiempo, se podrá saber con mayor precisión cuales frecuencias surgieron en el tiempo, *pero el alcance temporal es escaso*. En otras palabras, “localizaciones nítidas en el tiempo y en la frecuencia son mutuamente excluyentes” [76, p. 52], simplemente, “no es posible localizar arbitrariamente una señal tanto en tiempo como en frecuencia” [56, p. 197]. Este fenómeno se conoce como **principio de incertidumbre**. Más detalles sobre este tema se pueden consultar en [72, Sec. 2.5.5], [56, Sec. 22.3] o [76, Sec. 2.2].

2.4.3. Comportamientos muestreados, teorema de muestreo y transformadas discretas de Fourier

Esta última sub-sección ya va encaminada al área de procesamiento digital de señales (DSP). En la práctica, cuando se desea analizar, almacenar, transmitir etc, una señal/función (continua por ejemplo), es totalmente imposible que las máquinas registren la infinidad de valores que dicha función toma a lo largo del tiempo, por tanto, lo que se hace es usar un dispositivo cuya tarea es detectar un dato cada cierto intervalo regular de tiempo δ , esto motiva las siguientes definiciones.

Definición 2.4.9. Sea $\omega : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función.

1. La función ω **muestreada cada δ unidades de tiempo** (o simplemente **δ -muestreada**), denotada “ $\omega_{[\delta]}$ ” es la función $\omega_{[\delta]} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^m$, dada por $\omega_{[\delta]}(k) := \omega(k\delta)$, es decir, se restringe el dominio de ω al conjunto $\{k\delta \in \mathbb{R} \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
2. El **control digital** asociado a $\omega_{[\delta]}$, denotado “ $\vec{\omega}_{[\delta]}$ ” es la función $\vec{\omega}_{[\delta]} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$, donde para cada $k \in \mathbb{Z}$, $\vec{\omega}_{[\delta]}(t) := \omega_{[\delta]}(k\delta)$ si $t \in [k\delta, (k+1)\delta)$. $\lrcorner$

En la Figura 2.5 se muestra el ejemplo de la función continua $f(t) = \frac{\sin(2\pi t)}{2\pi t}$ si $t \neq 0$ y $f(0) = 1$ para $t \in [-1, 1]$, su función δ -muestreada asociada $f_{[\delta]}(t)$, y su control digital asociado $\vec{f}_{[\delta]}(t)$. Tomando el segundo como unidad de tiempo, δ es el número de muestras por segundo (también llamado periodo de muestreo), y δ^{-1} es la frecuencia de muestreo cuyas unidades son los ciclos por segundo (Hz). Por ejemplo, una frecuencia de muestreo de 44.1kHz significa que hay $\delta^{-1} = 44100$ muestras en cada segundo, y se está tomando un valor cada $\delta = \frac{1}{44100}$ segundos.

Aunque es posible definir un “sistema muestreado”, concepto importante en la teoría del control (ver Def. [30, Def. 2.10.1]), el interés para esta tesis está en lo que se observa en la práctica, a saber, la transición de un comportamiento Λ LIT continuo a uno discreto, se realiza mediante *el muestreo de la respuesta al impulso de Λ* .

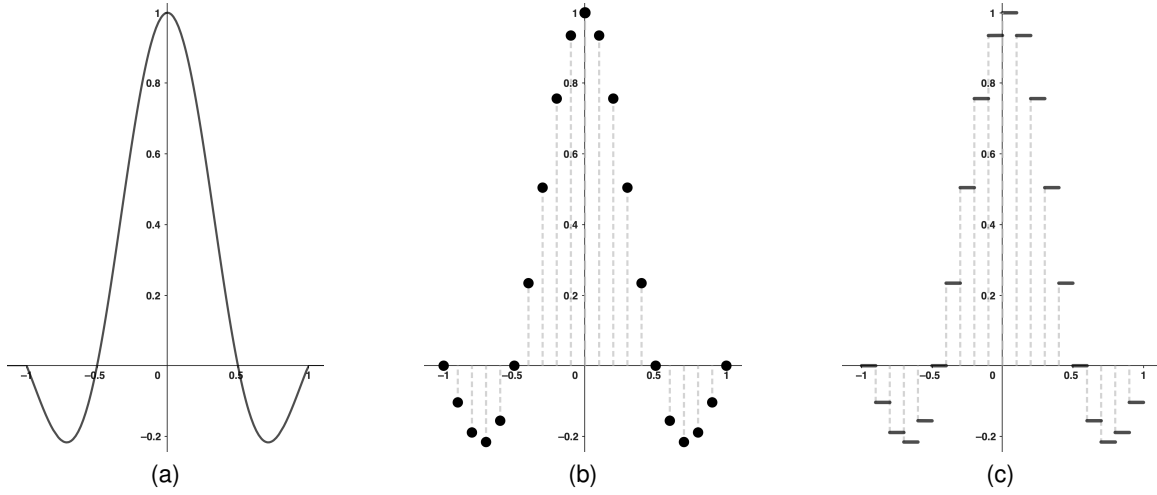


Figura 2.5: (a) Gráfica de $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ donde $f(t) = \frac{\sin(2\pi t)}{2\pi t}$ si $t \neq 0$ y $f(0) = 1$. (b) Gráfica de $f_{[\delta]} : \{-10, -9, -8, \dots, 9, 10\} \rightarrow \mathbb{R}$, la función δ -muestreada de f con $\delta = \frac{1}{10}$, se trata de una sucesión finita de 21 números reales. (c) Gráfica del control digital $\vec{f}_{[\delta]}$ asociado a $f_{[\delta]}$, se trata de una función constante por partes en el intervalo $[-1, 1)$. (Geogebra).

Definición 2.4.10. Sea $\Lambda = (\mathbb{R}, \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p, \lambda)$ un comportamiento LIT continuo con respuesta al impulso K . El **comportamiento δ -muestreado** asociado a Λ , es el comportamiento $\Lambda_{[\delta]} = (\mathbb{Z}, \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p, \lambda_{\delta})$ LIT discreto, cuya respuesta al impulso (sucesión de Markov) es $K_{[\delta]}$, y por tanto $\bar{\lambda}_{\delta}(\omega_{[\delta]})(k) = (K_{[\delta]} * \omega_{[\delta]})(k)$. Las entradas admisibles de $\Lambda_{[\delta]}$ son funciones δ -muestreadas cuya función original es admisible para Λ y tiene duración finita. ┘

El problema que se pretenden discutir en lo que resta del capítulo es: dado Λ LIT continuo ¿es posible que $\Lambda_{[\delta]}$ LIT “aproxime” (o “simule”) con exactitud el comportamiento original Λ ? ¿en qué sentido, y bajo qué condiciones se da esta “simulación”?

Considérese el escenario donde se conoce $f_{[\delta]}(k)$ para alguna $\delta > 0$, pero se desconoce la función original f , ¿se puede reconstruir por completo la función f a partir de $f_{[\delta]}(k)$? El siguiente resultado da las condiciones y el medio para hacerlo.

Teorema 2.4.11. [de muestreo (Whittaker-Nyquist-Kotelnikov-Shannon)] Sea $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ tal que $\mathcal{F}(f) \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ y $\text{sop}(\mathcal{F}(f)) \subset [-\xi_{\text{máx}}, \xi_{\text{máx}}] \subset \mathbb{R}$. Entonces, para toda $\delta > 0$ se cumple que $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |f_{[\delta]}(k)|^2 < \infty$, y para toda $\delta \leq \frac{1}{2\xi_{\text{máx}}}$ se cumple que

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_{[\delta]}(k) \text{senc} \left(\frac{\pi}{\delta} (t - k\delta) \right) \quad \text{p.c.t. } t \in \mathbb{R}, \quad (2.59)$$

donde $\text{senc}(x) := \frac{\sin x}{x}$. Si además se tiene que $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |f_{[\delta]}(k)| < \infty$, entonces la serie converge uniformemente en $\mathbb{R}$ y (2.59) se cumple para toda $t \in \mathbb{R}$ [56, p. 355]. ┘

Este teorema es de enorme relevancia para la informática y las telecomunicaciones, pues demuestra que para transmitir/almacenar una señal/función $f \in L^2(\mathbb{R})$ con ancho

de banda $\xi_{\max} \in \mathbb{R}_{>0}$ (es decir, $\text{sop}(\mathcal{F}(f)) \subset [-\xi_{\max}, \xi_{\max}]$), basta con $f_{[\delta]}$ con $\delta^{-1} \text{Hz} \geq 2\xi_{\max} \text{Hz}$, pues a partir de $f_{[\delta]}$ se puede recuperar f por completo mediante la fórmula en (2.59). Más aún, se tiene la siguiente proposición.

Corolario 2.4.12. *Sean $\omega \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ y δ tal que cumplen las hipótesis del teorema de muestreo (incluyendo la necesaria para la convergencia uniforme). Se tiene que*

$$\int_{\mathbb{R}} \omega(t) dt = \delta \sum_{k=-\infty}^{\infty} \omega_{[\delta]}(k) = \int_{\mathbb{R}} \vec{\omega}_{[\delta]}(t) dt \quad \lrcorner$$

Prueba. Ver Prop. A.1.52 en la página 185. □

Por otra parte, también se tienen análogas de la TF en el caso discreto.

Definición 2.4.13. *Sea $f_{[\delta]}(k)$, $k \in \mathbb{N}$ una sucesión de números reales (o complejos) que proviene de una función δ -muestreada f .*

1. *La **transformada de Fourier de tiempo discreto (DTFT)** de $f_{[\delta]}(k)$, denotada $\text{DTFT}[f_{[\delta]}]$, es la función de variable real $\xi \in \mathbb{R}$ definida como*

$$\text{DTFT}[f_{[\delta]}](\xi) := \widehat{f_{[\delta]}}(e^{i2\pi\xi\delta}) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{[\delta]}(n) e^{-i2\pi\xi n\delta},$$

donde $\widehat{f_{[\delta]}}$ es la transformada Z (Def. 2.3.27) para el caso $p = 1 = m$.

2. *La **transformada discreta de Fourier (DFT)** de $f_{[\delta]}$, de orden N , denotada $\text{DFT}^N[f_{[\delta]}]$, es la función de variable discreta $k \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ definida como*

$$\text{DFT}^N[f_{[\delta]}](k) := \sum_{n=0}^{N-1} f_{[\delta]}(n) e^{-i2\pi kn/N} \quad [77, \text{p. 89}]. \quad \lrcorner$$

Definiendo $g_{[\delta]}(k) = f_{[\delta]}(k)$ si $k \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ y $g_{[\delta]}(k) = 0$ si $k \geq N$, ocurre que $\text{DTFT}[g_{[\delta]}](k(N\delta)^{-1}) = \text{DFT}^N[f_{[\delta]}](k)$ para toda $k \in \{0, 1, \dots, N-1\}$, por tanto la DFT es un caso particular de la DTFT y por tanto ambas son un caso particular de la TZ. Así, los resultados de la TZ también aplican para estas dos transformadas (en particular el Teorema 2.3.28 de convolución). También es posible generalizar la Definición 2.4.13 a matrices como se hizo en la Def. 2.3.27 (y así también aplicaría el Teorema 2.3.29).

La DFT tiene inversa dada por $\text{DFT}^{N^{-1}}[f_{[\delta]}](n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \text{DFT}^N[f_{[\delta]}](k) e^{i2\pi nk/N}$ [56, p.

67], [77, p. 145]. Las transformadas $\text{DFT}^{N^{-1}}$ y la DFT^N son relevantes en la práctica como un medio para implementar la transformada de Fourier y realizar un análisis espectral tanto en línea como fuera de línea⁴¹ ([69, Sec. 4.3], [72, Cap. 5], [56, Sec. 8-10] y [77]).

Por su parte, la DTFT como análoga de la TF para el caso continuo, provee información sobre el contenido espectral de $f_{[\delta]}$. Este último tema es más delicado, pues requiere

⁴¹Un trabajo que ahonda en la teoría del análisis de Fourier con énfasis en un dominio discreto y más aún, a partir de esta teoría, realiza la implementación de la “convolución circular” (en contraste a esta tesis, la convolución usada es la denominada “convolución lineal”) en *tiempo real* (o en línea), es la tesis “Análisis de Fourier aplicado a la convolución en tiempo real” [69] de Pablo Fichtl. Este último trabajo también será de gran ayuda en futuros capítulos, para aterrizar toda la teoría expuesta al fenómeno del sonido.

de maquinaria matemática más pesada que la mencionada hasta ahora. La problemática principal es la siguiente: si tiene sentido realizar el análisis espectral de una función δ -muestreada, entonces surgen preguntas legítimas: ¿cuáles son las diferencias entre el espectro de Fourier de f y el espectro de Fourier de $f_{[\delta]}$? ¿qué cambios ocurren en el dominio de la frecuencia al momento de muestrear una función?, ¿se mantienen, añaden, o suprimen frecuencias? Gasquet y Witomski lidian con esta problemática en [56, Cap. 11] y utilizan los conceptos⁴² matemáticos de “distribución” y “función generalizada”⁴³. Estos autores definen una función muestreada $f_{[\delta]}$ como una distribución obtenida mediante $f \mapsto \delta f \Delta_\delta = \delta \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(k\delta) D_{n\delta}$ [56, p. 343], donde $D_{n\delta}$ es la delta de Dirac centrada en el punto $n\delta$, esto último permite definir la “transformada de Fourier discreta” como la “TF de la distribución” $\delta f \Delta_\delta$ (denotada $\widehat{\delta f \Delta_\delta}$), posteriormente se utiliza un resultado conocido como *fórmula de sumación de Poisson*:

$$\widehat{\delta f \Delta_a} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}\left(\xi - \frac{n}{\delta}\right) = \delta \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\delta) e^{-i2\pi \xi n \delta} \quad [56, p. 349] \quad (2.60)$$

esta igualdad (en el sentido de distribuciones) muestra que la transformada de Fourier de una función muestreada es una función $\frac{1}{\delta}$ -periódica, ya que $e^{-i2\pi(\xi+\delta^{-1})n\delta} = e^{-i2\pi \xi n \delta}$, además el término $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}\left(\xi - \frac{n}{\delta}\right)$ exhibe que “el espectro de la señal muestreada se obtiene al sumar todas las traslaciones del espectro de la señal original f ” [56, p. 349]. En resumidas cuentas, muestrear una función en el dominio tiempo, implica “periodizar” el espectro de la función original en el dominio de la frecuencia, la Figura 2.6 sintetiza muy bien esta última idea.

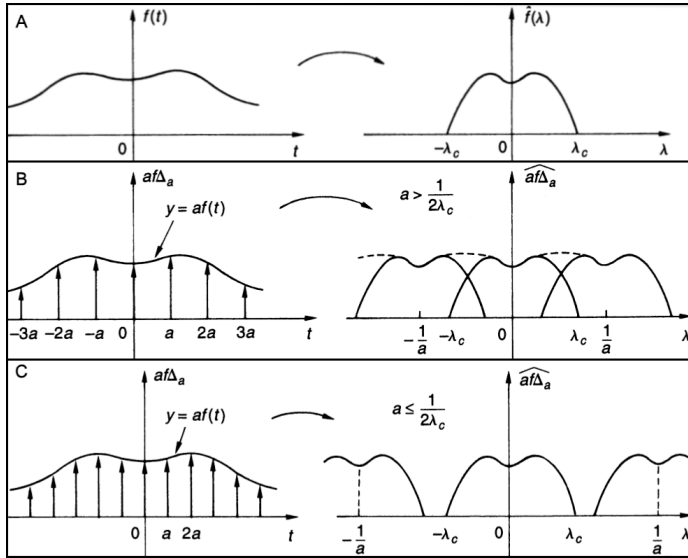


Figura 2.6: Cambios en el espectro de Fourier al muestrear una función. La nomenclatura usada en las gráficas adaptada a la usada en esta tesis es: $\widehat{(\cdot)} \equiv \mathcal{F}(\cdot)$, $a \equiv \delta$, $\lambda_c \equiv \xi_{\text{máx}}$. $af \Delta_a$ es la función a -muestreada de f en el sentido de una distribución. Figura adaptada de [56, Figs. 37.3 y 37.4].

La Figura 2.6 muestra los escenarios posibles de la TF de una función muestreada, el teorema de muestreo está fuertemente relacionado, pues los únicos dos escenarios

⁴²Gerald Kaiser explica *grosso modo* en qué conociste estos conceptos en [76, p. 26].

⁴³Conceptos desarrollados en gran parte por el matemático Laurent Schwartz (a mitad del siglo pasado) en su obra titulada “*Théorie des distributions*”. La infame delta de Dirac, definida inicialmente como la “función” $\delta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que cumple que: $\delta(t) = 0$ si $t \neq 0$, $\delta(0) = \infty$ y además $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(t) dt = 1$ para $\varepsilon > 0$, adquiere su debido rigor y justificación en la teoría de distribuciones de Schwartz [72, Sec. 3.1]. Intuitivamente, la sucesión regularizante estándar (Figura 2.3) “converge” a la delta de Dirac, que es una función generalizada.

son: $\delta^{-1} \geq 2\xi_{\text{máx}}$ y $\delta^{-1} < 2\xi_{\text{máx}}$. En la izquierda de B, se muestra la señal a -muestreada de f con una frecuencia de muestreo $a > 1/(2\lambda_c)$, a la derecha está la TF de la señal muestreada (que es periódica), en este caso existe un solapamiento en el dominio de la frecuencia lo cual crea amplificación de frecuencias que no corresponden al espectro de la señal original (fenómeno denominado *aliasing* o “solapamiento”). A la derecha de C no existe solapamiento, pues la separación entre periodos es mayor al ancho de banda de f . La frecuencia crítica de muestreo $a = 1/(2\lambda_c)$ se denomina *frecuencia de Nyquist*.

Aunque estos últimos conceptos se han abordado muy someramente, sirven para dar respuestas a las preguntas planteadas párrafos arriba.

Observación 2.4.14. Sea Λ un comportamiento LIT continuo UBIBO con función de lectura de salida λ , respuesta al impulso K y $\Lambda_{[\delta]}$ el comportamiento muestreado asociado con función de lectura de salida λ_δ . Supóngase que la función $s \mapsto K(\tau\delta - s)\omega(s)$ (ω entrada admisible para Λ) cumple las hipótesis del teorema de muestreo. Entonces $\Lambda_{[\delta]}$ “simula” Λ por completo, en el sentido de que a partir de $\bar{\lambda}_\delta$, es posible recuperar $\bar{\lambda}$. Esto último se justifica al observar que

$$\begin{aligned} (\bar{\lambda}(\omega))_{[\delta]}(\tau) &= \bar{\lambda}(\omega)(\tau\delta) = \underbrace{(K * \omega)}_{\text{conv. continua}}(\tau\delta) = \int_{\mathbb{R}} K(\tau\delta - s)\omega(s) ds \\ &= \delta \sum_{j=-\infty}^{\infty} (K(\tau\delta - s))_{[\delta]}(j)\omega_{[\delta]}(j) = \delta \underbrace{(K_{[\delta]} * \omega_{[\delta]})}_{\text{conv. discreta}}(\tau) = \delta \bar{\lambda}_\delta(\omega_{[\delta]})(\tau). \end{aligned}$$

Por tanto, para una δ suficientemente pequeña, se tendrá que $(\bar{\lambda}(\omega))_{[\delta]}(k) = \delta \bar{\lambda}_\delta(\omega_{[\delta]})(k)$ para toda $k \in \mathbb{N}$. De manera más específica, si $\delta^{-1} \geq 2\xi_{\text{máx}}$, donde K y ω tienen ancho de banda $\xi_{\text{máx}}$, entonces K y $K_{[\delta]}$ tienen mismo espectro de Fourier al igual que ω y $\omega_{[\delta]}$ (Fig. 2.6), luego, por los teoremas de convolución discutidos en §2.3.3, restringiendo el dominio de la TF a $\xi \in [-\xi_{\text{máx}}, \xi_{\text{máx}}]$, se tendrá que $\mathcal{F}(\bar{\lambda}(\omega)) = \mathcal{F}(K * \omega) = \mathcal{F}(K)\mathcal{F}(\omega) = \mathcal{F}(K_{[\delta]})\mathcal{F}(\omega_{[\delta]}) = \mathcal{F}(K_{[\delta]} * \omega_{[\delta]}) = \mathcal{F}(\bar{\lambda}_\delta(\omega_{[\delta]}))$, es decir, $\mathcal{F}(\bar{\lambda}(\omega))(\xi) = \mathcal{F}(\bar{\lambda}_\delta(\omega_{[\delta]}))(\xi)$ para toda $\xi \in [-\xi_{\text{máx}}, \xi_{\text{máx}}]$. Así, (por el teorema de muestreo), $\bar{\lambda}(\omega)$ se recupera con $(\bar{\lambda}(\omega))_{[\delta]} \approx \delta \bar{\lambda}_\delta(\omega_{[\delta]})$. Todo lo anterior justifica que $\Lambda_{[\delta]}$ será una buena aproximación de Λ siempre que las entradas y la respuesta al impulso tengan ancho de banda dos veces menor que la frecuencia de muestreo δ^{-1} . $\lrcorner$

Al margen de la teoría, la realidad es que la mayoría de las señales encontradas en la práctica, tienen ancho de banda ilimitado, por lo que siempre existe el problema del solapamiento. Si K tiene ancho de banda ilimitado o bien ancho de banda $\xi_{\text{máx}} > \frac{1}{2\delta}$, Gasquet y Witomski comentan lo que se debe hacer:

...es necesario filtrar la señal antes de muestrearla. Al pasar la señal a través de un filtro⁴⁵ de paso bajo bien diseñado, se obtienen dos ventajas: se elimina el ruido de alta frecuencia y se tiene una mejor idea sobre la frecuencia de muestreo adecuada. Para calcular numéricamente el espectro de una señal física, es necesario filtrar la señal antes de muestrearla. Esto es para evitar el problema del *aliasing* [56, p. 360].

De esta forma se puede asegurar que $K_{[\delta]}$ sea fiel al espectro de Fourier de K al menos para frecuencias menores o iguales a $\frac{\delta^{-1}}{2}$.

⁴⁴Corolario 2.4.12.

⁴⁵En esta tesis se debe entender el término “filtro” como un comportamiento Λ implementado o materializa-

2.5. Resumen sobre los sistemas y comportamientos LIT

Si bien las Observaciones 2.2.20, 2.2.35, 2.3.23, 2.3.26, 2.4.5 y 2.4.14, buscaron sintetizar conclusiones y resultados importantes de cada apartado, es pertinente hacer un resumen de lo expuesto en el capítulo respecto a los sistemas y comportamientos LIT.

Caso continuo

Un sistema $\Sigma = (\mathbb{R}, \mathcal{X}, \mathcal{U}, \phi) = (\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m, \phi)$ continuo LIT, es un sistema (inicializado en x_0) cuya función de transición es $\phi(\tau, 0, x_0, \omega) = \xi(\tau)$, donde ξ es la solución del PVI: $\dot{\xi}(t) = f(\xi(t), \omega(t))$, $\xi(0) = x_0$ y donde $f(\cdot, \cdot) : \mathcal{X} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{X}$ es un lado derecho (Def. 2.2.21) y lineal⁴⁶, por lo que la ecuación diferencial (PVI) que describe (Σ, x_0) a través de sus estados es $\dot{\xi}(t) = f(\xi(t), \omega(t)) = A\xi(t) + B\omega(t)$, $\xi(0) = x_0$ donde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $f(\xi(t), 0) =: A\xi(t)$ y $f(0, \omega(t)) =: B\omega(t)$. Este sistema se puede ver también como un comportamiento i/s (caja negra) $\Lambda_{\Sigma,0}$, con salidas en $\mathcal{Y} = \mathbb{R}^n = \mathcal{X}$, donde la función de salida se define como (Def. 2.2.6 1. y Obs. 2.2.7): $\bar{\lambda}(\omega)(t) := \phi(t, 0, x_0, \omega) = \xi(t)$, y así las ecuaciones que describen $\Lambda_{\Sigma,0}$ (como comportamiento i/s realizado) son

$$\dot{\xi}(t) = A\xi(t) + B\omega(t), \quad \xi(0) = x_0, \quad \text{y} \quad \bar{\lambda}(\omega)(t) = \xi(t). \quad (2.61)$$

Si Σ además tiene salidas en $\mathcal{Y} = \mathbb{R}^p$, (por definición) su función de lectura de salida $h : \mathbb{R} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ es lineal, y da lugar a un comportamiento (del sistema inicializado) $\Lambda_{\Sigma,0}$ (Def. 2.2.6 2.) con función de salida

$$\bar{\lambda}(\omega)(t) := h(t, \phi(t, 0, x_0, \omega)) = h(t, \xi(t)) =: C\xi(t), \quad C \in \mathbb{R}^{p \times n}, \quad (2.62)$$

y las ecuaciones que describen este comportamiento son

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) = A\xi(t) + B\omega(t), & \xi(0) = x_0, \\ \bar{\lambda}(\omega)(t) = C\xi(t). \end{cases} \quad (2.63)$$

Si $p = n$ y C es la matriz identidad, la ecuación (2.64) es el caso particular del comportamiento i/s en (2.61). La solución de (2.63) está dada por la fórmula de variación de parámetros (Corolario 2.1.24) y (2.64) se vuelve

$$\bar{\lambda}(\omega)(t) = C\xi(t) = Ce^{tA}x_0 + \int_0^t \underbrace{Ce^{(t-s)A}B}_{K(t-s)}\omega(s)ds = Ce^{tA}x_0 + (K * \omega)(t). \quad (2.65)$$

$K(t) := Ce^{tA}B \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}^{p \times m})$ es la respuesta al impulso del comportamiento $\Lambda_{\Sigma,0}$. Si $x_0 = 0$, entonces (2.65) muestra que la función de salida está determinada de manera única por la convolución continua (Def. 2.3.6) de la respuesta al impulso K con la entrada particular ω , es decir

$$\bar{\lambda}(\omega)(t) = (K * \omega)(t). \quad (2.66)$$

do de alguna forma, por ejemplo, en un programa computacional o algún dispositivo electrónico, el cual busca simular el comportamiento (teórico) original de Λ .

⁴⁶De manera inversa, en la Prop. 2.2.25 se mostró que si una función $f(t, x, u) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ cumple que $f(\cdot, x, u)$ es localmente esencialmente acotada con x, u fijos, y $f(t, \cdot, \cdot)$ es lineal para cada t fija, entonces f es un lado derecho.

En todo lo anterior se usa que si $(\Sigma, 0)$ es LIT, entonces el comportamiento asociado $\Lambda_{\Sigma,0}$ es LIT (ver Obs. 2.2.30).

Por otra parte, un comportamiento $\Lambda = (\mathbb{R}, \mathcal{U}, \mathcal{Y}, \lambda) = (\mathbb{R}, \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p, \lambda)$ continuo LIT (comportamiento integral e invariante en el tiempo - Obs. 2.2.34), es un comportamiento donde (entre otras condiciones) la función de respuesta λ es lineal e invariante en el tiempo, y la función de salida (al igual que en (2.66) para $\Lambda_{\Sigma,0}$) está caracterizada por la convolución de la entrada con la RI (Prop. 2.2.33): $\bar{\lambda}(\omega)(t) = (K * \omega)(t)$.

En cualquier comportamiento Λ LIT continuo (proveniente o no de un sistema con salidas) que sea UBIBO (Def. 2.3.3) (o equivalentemente, con $K \in L^1(\mathbb{R}_{\geq 0} \mathbb{R}^{p \times m})$ - Prop. 2.3.4), siempre es posible obtener/aproximar la RI K , evaluando la función de salida en los impulsos continuos $\rho_{j_0}^k$ (Def. 2.3.10) para todo $j_0 \in \overline{m}$, es decir

$$\bar{\lambda}(\rho_{j_0}^k) = (K * \rho_{j_0}^k)(t) \approx K_{(j_0)}(t)^{47}, \quad (2.67)$$

donde $K_{(j_0)}$ es la j_0 -ésima columna de K .

La matriz (o función) de transferencia de un comportamiento Λ , es la transformada de Laplace (Def. 2.3.11) de la respuesta al impulso ($\hat{K}$). El teorema de convolución (Prop. 2.3.29) caracteriza la función de salida en el dominio de la frecuencia, mediante el producto de la matriz de transferencia con la TL de la entrada, ya que al aplicar la TL a (2.66), se tiene que

$$\hat{\bar{\lambda}}(\omega)(s) = \widehat{(K * \omega)}(s) = \hat{K}(s)\hat{\omega}(s). \quad (2.68)$$

Si el comportamiento en cuestión es realizado por un sistema (A, B, C) , se tienen tres equivalencias para la matriz de transferencia:

$$\hat{K}(s) = \sum_{j=1}^{\infty} C A^{j-1} B s^{-j} = C(sI - A)^{-1} B = W(s), \quad (2.69)$$

donde W es una función racional (Prop. 2.3.18). La importancia de la matriz (o función) de transferencia se debe a que provee la información necesaria (a través de cambios en amplitud y fase) para conocer en qué medida cada frecuencia de la descomposición de Fourier de una entrada admisible es afectada por el comportamiento Λ . También es importante mencionar que la función de transferencia es el cociente entre la salida y la entrada del comportamiento en el dominio de la frecuencia.

Caso discreto

Un sistema $\Sigma = (\mathbb{Z}, \mathcal{X}, \mathcal{U}, \phi) = (\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m, \phi)$ discreto LIT, es un sistema inicializado en x_0 , de dimensión finita, cuya función de transición al siguiente estado $\mathcal{P} : \mathbb{Z} \times \mathcal{X} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{X}$ (definida en (2.19)) es lineal e invariante al tiempo, por lo que la ecuación (de diferencias) que describe los estados de (Σ, x_0) es $x(t+1) = \mathcal{P}(x(t), u(t)) = Ax(t) + Bu(t)$, $x(0) = x_0$, donde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\mathcal{P}(x(t), 0) =: Ax(t)$ y $\mathcal{P}(0, u(t)) =: Bu(t)$. Si $x_0 = 0$ y el sistema tiene salidas en $\mathcal{Y} = \mathbb{R}^p$, entonces el comportamiento asociado a $(\Sigma, 0)$, denotado $\Lambda_{\Sigma,0}$ es LIT discreto (Prop. 2.2.12), y la función de salida $\bar{\lambda}$ es lineal (por un argumento análogo a (2.62)), así, las ecuaciones que describen $\Lambda_{\Sigma,0}$ (realizado) son

$$\begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + Bu(t), & x(0) = x_0 \end{cases} \quad (2.70)$$

$$\begin{cases} \bar{\lambda}(u)(t) = Cx(t), & C \in \mathbb{R}^{p \times m}. \end{cases} \quad (2.71)$$

⁴⁷ K_{j_0} es la j_0 -ésima columna de K .

Si $p = n$ y C es la matriz identidad en $\mathbb{R}^{n \times n}$, la ecuación (2.71) es el caso particular del comportamiento i/s del sistema (análogo a (2.61)).

La RI del sistema Σ es $\mathcal{A}_{k+1} = CA^k B$ para todo $k \in \mathbb{N}$ (Corolario 2.3.1).

Un comportamiento LIT discreto $\Lambda = (\mathbb{Z}, \mathcal{U}, \mathcal{Y}, \lambda) = (\mathbb{Z}, \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p, \lambda)$ siempre tiene asociada una RI única $\mathcal{A} : \mathbb{N}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}^{p \times m}$ (sucesión de matrices, también llamada sucesión de Markov), que caracteriza al sistema a través de la convolución discreta (Def. 2.2.19), por lo que al igual que el caso continuo se tiene que $\bar{\lambda}(u) = (\mathcal{A} * u)$.

En cualquier comportamiento Λ LIT discreto, siempre se pueden obtener los primeros t términos de la RI (es decir $\mathcal{A}(1), \mathcal{A}(2), \dots, \mathcal{A}(t)$), evaluando la función de salida en un impulso discreto $\delta_{j_0}^{t_0}$ (Def. 2.3.5), para $t_0 \in \{0, 1, \dots, t-1\}$ y para $j \in \bar{m}$, pues de manera similar a (2.67), se tiene que $\bar{\lambda}(\delta_{j_0}^{t_0}) = (\mathcal{A} * \delta_{j_0}^{t_0})(t) = \mathcal{A}_{(j_0)}(t_0)$, donde $\mathcal{A}_{(j_0)}(t_0)$ es la j -ésima columna de la matriz $\mathcal{A}(t_0)$.

La matriz de transferencia en el caso discreto es la transformada Z (Def. 2.3.27) de la RI ($\hat{\Lambda}$), y se tiene un resultado análogo a (2.68), debido al teorema de convolución discreta para matrices (Corolario 2.3.29): $\hat{\bar{\lambda}}(u)(s) = (\hat{\mathcal{A}} * u)(s) = \hat{\Lambda}(s)\hat{u}(s)$.

Si el comportamiento en cuestión es realizado por un sistema (A, B, C) inicializado en 0, entonces $\mathcal{A}(t) = CA^{t-1}B$, y aplicando la TZ a las ecuaciones (2.70) y (2.71) se llega al mismo resultado en (2.69), es decir, $\hat{\Lambda}(s) = \sum_{j=1}^{\infty} CA^{j-1}Bs^{-j} = C(sI - A)^{-1}B = W(s)$.

Análisis vs. síntesis

En el caso continuo, la transición de una función del dominio tiempo al dominio frecuencia es mediante la TL o TF (caso particular de la TL), y para el caso discreto la TZ, DFT o DTFT (casos particulares de la TZ). La transición del dominio tiempo al dominio frecuencia se denomina “análisis”, y el caso inverso se denomina “síntesis”. La síntesis se realiza con las transformadas inversas: TZ^{-1} , TF^{-1} , DFT^{-1} etc. La Figura 2.7 busca ilustrar estos conceptos en un comportamiento Λ LIT (ya sea discreto o continuo), con RI K .

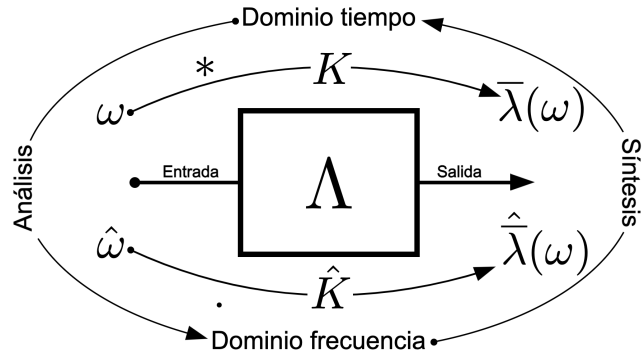


Figura 2.7: Análisis vs. síntesis.

Muestreo

Todo comportamiento Λ LIT continuo, tiene un comportamiento LIT discreto asociado $\Lambda_{[\delta]}$ (obtenido a través del muestreo de la RI de Λ), llamado comportamiento δ -muestreado (Def. 2.4.10). En §2.4.3 se argumentó como $\Lambda_{[\delta]}$ será “fiel” a Λ , al menos para frecuencias menores a $\frac{\delta^{-1}}{2}$. Es decir, si $\bar{\lambda}$ y $\bar{\lambda}_{\delta}$ son las funciones de salida de Λ y $\Lambda_{[\delta]}$ respectivamente, entonces a partir de $\bar{\lambda}_{\delta}(\omega_{[\delta]})$ es posible recuperar una función $\gamma(t)$ que aproxima $\bar{\lambda}(\omega)$ en frecuencias menores a $\frac{\delta^{-1}}{2}$, es decir $\mathcal{F}(\gamma) \approx \mathcal{F}(\bar{\lambda}(\omega))|_{[-\frac{\delta^{-1}}{2}, \frac{\delta^{-1}}{2}]}$. También ocurrirá que el espectro de $\bar{\lambda}_{\delta}(\omega_{[\delta]})$ sea similar al de $\bar{\lambda}(\omega)|_{[-\frac{\delta^{-1}}{2}, \frac{\delta^{-1}}{2}]}$. La Figura 2.8 busca sintetizar los distintos casos abordados en el capítulo para un sistema o comportamiento LIT de dimen-

sión finita, señalando relaciones importantes entre los casos posibles, y sus funciones asociadas en el dominio tiempo (DT) y el dominio frecuencia (DF).

	Caso continuo	Caso discreto
Sistema inicializado en cero	$(\Sigma, 0) = (\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m, \phi)$ $\phi(\tau, 0, 0, \omega) = \xi(\tau),$ $\dot{\xi}(t) = A\xi(t) + B\omega(t), \xi(0) = 0$	$(\Gamma, 0) = (\mathbb{Z}, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m, \mathcal{P})$ $x(t+1) = \mathcal{P}(x(t), u(t))$ $= Ax(t) + Bu(t), x(0) = 0$
Comportamiento asociado al sistema inicializado	$\Lambda_{\Sigma,0} = (\mathbb{R}, \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p, \lambda_{\Sigma})$ $DT: \bar{\lambda}_{\Sigma}(\omega)(t) = \int_0^t C e^{(t-s)A} B \omega(s) ds$ $DF: \hat{\bar{\lambda}}_{\Sigma}(\omega)(\xi) = C(\xi I - A)^{-1} B \hat{\omega}(\xi)$	$\Lambda_{\Gamma,0} = (\mathbb{Z}, \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p, \lambda_{\Gamma})$ $DT: \bar{\lambda}_{\Gamma}(u)(k) = \sum_{j=0}^{k-1} C A^{k-j-1} B u(j)$ $DF: \hat{\bar{\lambda}}_{\Gamma}(u)(\xi) = C(\xi I - A)^{-1} B \hat{u}(\xi)$
Comportamiento arbitrario	$\Lambda_C = (\mathbb{R}, \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p, \lambda_C)$ $DT: \bar{\lambda}_C(\omega)(t) = (K * \omega)(t)$ $DF: \hat{\bar{\lambda}}_C(\omega)(\xi) = \hat{K}(\xi) \hat{\omega}(\xi)$	$\Lambda_D = (\mathbb{Z}, \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p, \lambda_D)$ $DT: \bar{\lambda}_D(u)(k) = (A * u)(k)$ $DF: \hat{\bar{\lambda}}_D(u)(\xi) = \hat{K}(\xi) \hat{u}(\xi)$
Comportamiento muestreado	$K_{[\delta]}$ Respuesta al impulso muestreada	$\Lambda_{[\delta]} = (\mathbb{Z}, \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p, \lambda_{\delta})$ $DT: \bar{\lambda}_{\delta}(\omega_{[\delta]})(k) = (K_{[\delta]} * \omega_{[\delta]})(k)$ $DF: \hat{\bar{\lambda}}_{\delta}(\omega_{[\delta]}) \approx \hat{\bar{\lambda}}_C(\omega) \Big _{\left[-\frac{\delta-1}{2}, \frac{\delta-1}{2}\right]}$

Figura 2.8: Distintos casos para un sistema y comportamiento LIT. Dado un comportamiento LIT continuo Λ_C arbitrario, si se encuentra un sistema Σ LIT continuo $(\Sigma, 0)$ inicializado en 0 tal que $\Lambda_{\Sigma,0} = \Lambda_C$, se dice que Σ es la realización de Λ_C . Lo mismo ocurre para el caso discreto: dado Λ_D , encontrar $(\Gamma, 0)$ tal que $\Lambda_{\Gamma,0} = \Lambda_D$ significa realizar Λ_D . Dado un comportamiento LIT Λ_C arbitrario, es posible transitar a uno discreto mediante el muestreo de la respuesta al impulso, y el comportamiento resultante también es puede ser candidato a ser realizado por un sistema discreto.

2.6. Observaciones finales

Representación del espacio de estados y ecuaciones escalares lineales. Velimir Jurdjevic⁴⁸ enfatiza como la ecuación diferencial matricial denominada “representación del espacio de estados”: $\dot{\xi}(t) = A\xi(t) + B\omega(t)$, está estrechamente relacionada con la ecuación diferencial escalar lineal con coeficientes constantes: $\xi^{(n)}(t) + a_1\xi^{(n-1)}(t) + a_2\xi^{(n-2)}(t) + \dots + a_1\xi(t) = u(t)$, que “modela un sistema mecánico o eléctrico controlado mediante una fuerza externa u ” [31, p. 101]. Es posible convertir la ecuación diferencial escalar a una ecuación diferencial matricial en representación de estados y viceversa, más detalles sobre este tema se pueden consultar en [31, Sec. 4.2].

Sistemas LIT con prealimentación, retroalimentación, en cascada y en paralelo. Es útil representar un sistema mediante un diagrama de bloques. El diagrama de la Figura

⁴⁸La obra *Geometric Control Theory* [31] (1997) de Velimir Jurdjevic ofrece un enfoque geométrico (cálculo en variedades, grupos de Lie etc.) de la teoría del control. Su obra está dirigida a niveles de posgrado.

2.9 (a), corresponde a las ecuaciones tratadas en esta tesis: $\dot{\xi}(t) = A\xi(t) + B\omega(t)$ y $\eta(t) = C\xi(t)$, donde $\eta(t) := \bar{\lambda}(\omega)(t)$.

Se pueden considerar más factores interviniendo en un sistema LIT, por ejemplo un elemento de prealimentación $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$ (*feedforward*), que considera el caso cuando una entrada toma dos caminos posibles: a través del sistema y fuera del sistema directo a la salida (Fig. 2.9 (b)). Las ecuaciones asociadas en este caso son: $\dot{\xi}(t) = A\xi(t) + B\omega(t)$, y $\eta(t) = C\xi(t) + D\omega(t)$. El tratamiento de este caso no se aleja demasiado de lo abordado en el capítulo (ver por ejemplo [71]).

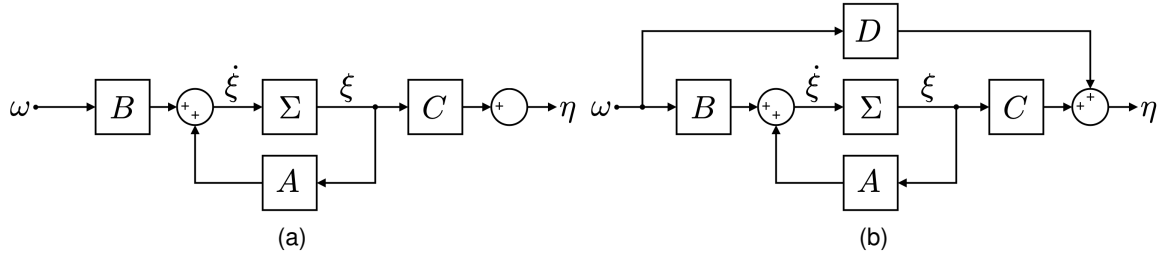


Figura 2.9: Diagramas de bloques de un sistema LIT (A, B, C), y de un sistema LIT con prealimentación (A, B, C, D).

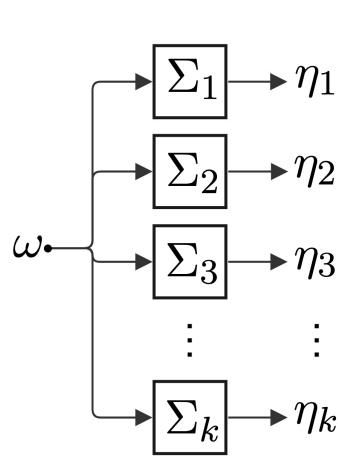


Figura 2.10: Sistemas en paralelo.

Se pueden considerar más variedades de elementos como: retroalimentación a estados (la salida afecta de manera directa los estados), retroalimentación a entradas (las salidas afectan de manera directa las nuevas entradas del sistema), sensores (dependiendo de la salida, el sensor se comunica con la entrada o los estados para modificarlos), así como añadir comunicaciones a otros sistemas. En este último caso, se hace la distinción entre sistemas (o comportamientos) en *paralelo*, donde una entrada se alimenta al mismo tiempo a k sistemas, dando lugar a k salidas, y sistemas en *cascada*, donde una entrada recorre k sistemas uno tras otro, dando lugar a una salida final transformada por todos los sistemas. Si los sistemas en cascada son LIT (con RI K_j para cada sistema Σ_j), entonces la salida η es una composición de k convoluciones con la entrada ω , es decir $\eta = K_k * \dots * K_3 * K_2 * K_1 * \omega$.

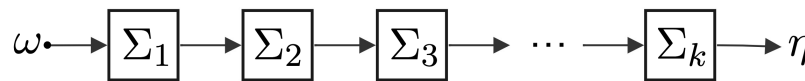


Figura 2.11: Sistemas en cascada.

¿Qué sigue?

Este capítulo presentó la (abstracta) teoría matemática del control enfocada en los sistemas/comportamientos LIT de dimensión finita. En los siguientes capítulos se discutirá la aplicación de esta teoría a tres sistemas/comportamientos concretos: (a) el sistema del sonido como fenómeno físico, (b) el sistema informático del procesamiento de señales acústicas, y (c) el sistema auditivo humano.

Capítulo 3

El sonido como sistema lineal e invariante en el tiempo y la medición directa de HRTFs



N este capítulo, se busca exponer como se justifica aplicar los resultados de la teoría de sistemas LIT al caso particular del fenómeno del sonido. Se argumentará como este último puede verse como dos sistemas LIT estrechamente relacionados: (1) La propagación del sonido como sistema físico: la conversión de una onda sonora $f(t)$ emitida en un punto P_0 , que al interactuar con el entorno físico $\bar{\lambda}$, se transforma en una onda sonora $\bar{\lambda}(f)(t)$ en un punto receptor P_1 . (2) El sonido como sistema en el área de procesamiento de señales acústicas, donde a una señal de audio se le aplica una función, algoritmo, o filtro para obtener una nueva señal. Esta última concepción es posible gracias a la tecnología de captura y procesamiento de audio actuales, donde el concepto de muestreo es crucial. El capítulo finalizará explicando el caso particular de la función de transferencia acústica referida a la cabeza.

3.1. Perspectiva general del sonido

3.1.1. Representaciones matemáticas del sonido

Llanamente, el sonido es un fenómeno físico que ocurre cuando un cuerpo vibrante transmite su patrón de movimiento a las partículas del medio en que se encuentra, el medio puede ser gaseoso líquido o sólido (principalmente). El movimiento de dicho cuerpo provoca una reacción en cadena que comienza con las partículas inmediatas a la superficie del cuerpo y se propaga en el medio a través de *ondas longitudinales* y *ondas transversales* (Fig. 3.1). Tanto en un medio gaseoso como en un medio líquido, las ondas longitudinales dominan sobre las transversales, y en el caso del medio gaseoso, las ondas transversales son prácticamente negligibles [78, Sec. 1.1.2]. Por tanto, el tipo de ondas que se encontrarán alrededor de la fuente de sonido (el cuerpo en vibración) son ondas longitudinales denominadas ondas acústicas o sonoras.

Dado que el sonido es producido por la vibración de un cuerpo, una primera caracterización es identificar el sonido por la función

$$f_m : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow [-a, a], \quad t \mapsto f_m(t) \quad (3.1)$$

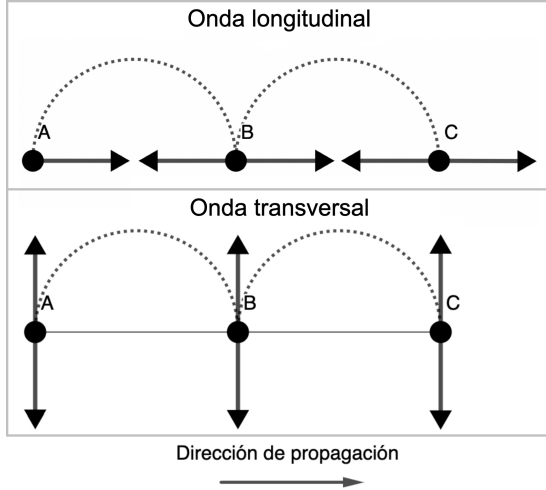


Figura 3.1: Onda transversal y onda longitudinal. En ambos caso se tiene una reacción en cadena representada por las líneas punteadas: una partícula A que afecta a una partícula adyacente B y ésta última afecta a una adyacente C. En las ondas transversales las oscilaciones (movimiento) de las partículas siguen la dirección de propagación de la onda, mientras que en las ondas longitudinales la oscilación de las partículas es perpendicular a la dirección de propagación. Figura basada en [78, Figs. 1.1 y 1.2].

donde $f_M(t)$ representa la posición de un punto fijo (elegido en el cuerpo) al tiempo t y respecto su posición en reposo, en este caso $f_m(t_0) = 0$ significa que el cuerpo está en la posición de reposo en el instante t_0 . El codominio de f_m es un intervalo $[-a, a] \subset \mathbb{R}$, para alguna $a \in \mathbb{R}_{>0}$ ya que el rango de movimiento es acotado.

Un ejemplo concreto de esta concepción es el experimento realizado por Herman von Helmholtz a mediados del siglo XIX, y documentado en su obra¹ *Sobre las Sensaciones del Tono como fundamento Fisiológico para la Teoría Musical* [79]. Dicho experimento, buscó estudiar el movimiento descrito por un diapasón vibrante A (Fig. 3.2), que consistió en añadirle un filamento o aguja b, luego se enrolló un papel B (cubierto con una delgada capa de carbón) en el cilindro de un *fonoautógrafo*, el cilindro rotaba a velocidad constante y la aguja registraba su movimiento al desprender el carbón del papel obteniendo el resultado en la Figura 3.3.

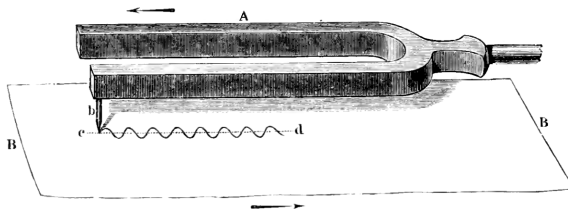


Figura 3.2: Configuración del experimento de Helmholtz. El resultado esperado es la grafica de alguna función sinusoidal [79, Fig. 5].



Figura 3.3: Resultado del experimento de Helmholtz con un diapasón [79, Fig. 6].

Ahora supóngase que la posición de la fuente se encuentra fija en un punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ respecto a algún sistema de coordenadas. Las ondas longitudinales propagadas² alrededor de la fuente, se traducen en cambios en la presión atmosférica respecto al tiempo. Por tanto, fijando un punto $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ cercano a la fuente, se tiene una

¹En el Apéndice B, se explica como esta obra propuso una teoría del proceso de audición humana que fue de gran influencia para teorías posteriores. La teoría que postula Helmholtz se apoya fuertemente en el Teorema de Fourier discutido en §2.4, (2.55).

²A menos que se señale lo contrario, se presupone que el medio de propagación es el aire o agua.

representación más del sonido

$$f^{P_1} : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow [-p_M, p_M], \quad t \mapsto f^{P_1}(t) \quad (3.2)$$

donde $f^{P_1}(t)$ representa la presión atmosférica (o hidrostática en el caso del agua) al instante t , en un punto P_1 cercano a la fuente. El codominio es un intervalo $[-p_M, p_M] \subset \mathbb{R}$, donde p_M es algún valor de presión atmosférica máximo. En este caso, $f(t_0) = 0$ significa que en el instante t_0 se tiene la presión atmosférica normal (silencio).

Definición 3.1.1. Un **tono puro** es un sonido cuya función f_m o f^{P_1} asociada, es una función sinusoidal (ver Def. 2.3.24), la frecuencia del tono puro es la frecuencia de las funciones f_m . Se usarán los términos “tono puro ϕ ”, “tono ϕ ” o “frecuencia ϕ ” (si no hay riesgo de ambigüedad) como sinónimos para hacer referencia a un tono puro con frecuencia ϕ . $\lrcorner$

La Figura 3.4 busca ilustrar el siguiente escenario: una fuente sonora en un punto P_0 emite un tono puro. Al tiempo 0 se comenzó a medir la presión atmosférica en un punto P_1 fijo de modo que $f^{P_1}(0) = p_M$, posteriormente transcurrieron t_1 segundos y al instante t_1 (marcado con la línea roja vertical) se tiene una presión mínima, $f^{P_1}(t_1) = -p_M$.

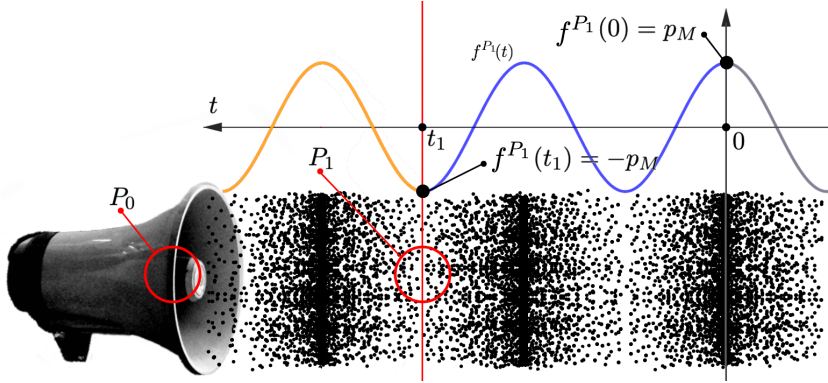


Figura 3.4: Ondas sonoras. Se ilustra la medición (en un punto P_1) de los cambios de presión respecto al tiempo de un tono puro.

El eje de las abscisas de la gráfica de f^{P_1} va hacia la izquierda y la ilustración debajo representa la presurización y la despresurización de las partículas (ondas longitudinales, propagadas hacia la derecha) de aire a lo largo del tiempo transcurrido. Un tiempo mayor que t_1 se interpreta como “el futuro” que aún no es registrado en el punto P_1 (naranja), el intervalo $[0, t_1]$ es la función ya registrada (azul rey), y los valores antes de 0 son los eventos ocurridos antes de comenzar a medir los cambios de presión (morado). Es fundamental señalar que esta exposición, donde se presume la forma de f^{P_1} para valores futuros y pasados se apoya en la suposición de que la fuente sonora es un tono puro *siempre*.

La tercer representación del sonido es posible gracias a las tecnologías de captura y procesamiento de audio actuales. Un micrófono es un dispositivo electrónico capaz de registrar las ondas sonoras que llegan él, mediante la conversión de las variaciones de presión atmosférica en variaciones de voltaje (tensión) [32, Sec. 1.1.1.]. Tal señal de voltaje se denomina señal *analógica* de la onda sonora. Con lo anterior, se considera la siguiente representación del sonido:

$$f_a : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow [-b, b], \quad t \mapsto f_a(t) \quad (3.3)$$

donde $f_a(t)$ representa el voltaje asignado por el micrófono en el instante t . El valor $b \in \mathbb{R}_{>0}$ es el voltaje máximo manejado por el dispositivo. La manera en que se asigna el voltaje en función del tiempo dependen del tipo de micrófono, por ejemplo, en micrófonos del tipo “condensador”, el voltaje está asignado por la posición de una membrana interna en el dispositivo que vibra en respuesta a las ondas acústicas recibidas [80, Sec. 2.2].

En el capítulo anterior, cuando se discutió el teorema de muestreo (Teo. 2.4.11), se mencionó que era imposible almacenar la cantidad infinita de valores que toma una función continua, por lo que se opta por muestrear la función. En la práctica, la conversión de la señal análoga de audio a la señal digital se lleva a cabo por un circuito eléctrico “ADC” (*analog to digital converter*) [80, Sec. 2.2], el cuál realiza el muestreo de la señal original cada δ unidades de tiempo en segundos, esto corresponde a la Definición 2.4.9 de función δ -muestreada. Por tanto, la siguiente representación del sonido es

$$f_{[\delta]} : \mathbb{N} \rightarrow [-1, 1] \cap \mathbb{Q}, \quad k \mapsto f_{[\delta]}(k) \quad (3.4)$$

donde $f_{[\delta]}$ ³ es una función δ -muestreada proveniente de una función analógica f_a .

La mínima frecuencia audible para el ser humano es 20 hercios y la máxima es 20,000 [3, Cap. 1]. Se denominan *infrasonidos* a los sonidos por debajo de los 20 Hz y *ultrasonidos* a los sonidos por arriba de los 20 kHz. Factores como el volumen del sonido, la distancia a la fuente, la existencia de obstáculos entre el receptor y la fuente, así como la salud del sistema auditivo son algunos factores que afectan la capacidad de percibir sonido. Por tanto, por el Teorema 2.4.11, un valor idóneo para δ en (3.4) es $\frac{1}{40,000}$ (la frecuencia de muestreo convencional para grabaciones de audio es 44.1 kHz [80, Sec. 2.2]). También se debe tomar en cuenta el fenómeno *aliasing* discutido al final del capítulo anterior, causado por los ultrasonidos, por tanto, en el proceso de muestreo realizado por el ADC también se considera lo que Gasquet y Witomski comentan en la cita reproducida en la página 55 (filtrar la señal analógica para eliminar frecuencias arriba de 20 kHz).

Por todo lo discutido hasta ahora, se tienen al menos cuatro maneras de caracterizar el sonido. Se supondrá que f_m , f^{P_1} y f_a son funciones continuas con soporte compacto, de manera más específica, lo que se supondrá de ahora en adelante es que $f_m, f^{P_1}, f_a \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$, donde

$$\mathcal{C}_c(\mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es continua, acotada y con soporte compacto}\}. \quad (3.5)$$

Se observa que $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, y el soporte compacto garantiza que toda función $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ tiene orden exponencial, así que la teoría de la transformada de Laplace y de Fourier expuesta en el capítulo anterior, así como los resultados de teoría del control para controles en $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, aplica para el conjunto $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$. Por otra parte, como $f_{[\delta]}$ es la función δ -muestreada de una función $f_a \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$, se tiene que $f_{[\delta]}$ es una sucesión donde solo un número finito de términos son distintos de cero, y así $f_{[\delta]} \in \ell_{\mathbb{Q}}$, donde

$$\ell_{\mathbb{Q}} := \left\{ f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q} \cap [-1, 1] \mid \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |f(k)|^q \right)^{\frac{1}{q}} < \infty, \quad q \in \{1, 2\} \right\},$$

con la extensión trivial de $f_{[\delta]}$ ($f_{[\delta]}(k) = 0$ para toda $k < 0$).

Los sub-índices m , a , (o ninguno, para el caso de f^{P_1}) serán usados para enfatizar qué tipo de representación se está tomando en cuenta.

³El condominio es $[-1, 1] \cap \mathbb{Q}$, ya que (nuevamente) las máquinas no pueden almacenar la cantidad infinita de dígitos de un número irracional, solo una aproximación racional.

La siguiente tabla sintetiza todo lo mencionado hasta ahora.

Representación	Descripción
$f_m \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$	Modela el movimiento de un punto fijo localizado en una fuente sonora (vibración mecánica de un cuerpo)
$f^{P_1} \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$	Modela las fluctuaciones de la presión del medio de propagación, medidas en un punto $P_1 \in \mathbb{R}^3$ cercano a una fuente sonora f_m (fluctuaciones de presión, forma de onda)
$f_a \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$	Modela la señal analógica de audio generada por un micrófono cercano a la fuente que mide la forma de onda (fluctuaciones de voltaje - corriente alterna)
$f_{[\delta]} \in \ell_{\mathbb{Q}}$	Modela la señal digital muestreada por un circuito ADC, y corresponde a la función δ -muestreada (sucesión en $[-1, 1] \cap \mathbb{Q}$, donde solo un número finito de términos son distintos de 0) de alguna señal analógica f_a

Tabla 3.1: Cuatro representaciones matemáticas del sonido.

Ondas sonoras en el dominio de la frecuencia: espectrograma

Las ondas sonoras son candidatas al análisis de Fourier, esto da lugar a un *espectrograma*, donde se busca representar una onda sonora graficando tiempo vs. frecuencia vs. amplitud. Esta representación tiene el problema de sufrir el principio de incertidumbre (ver lo mencionado inmediatamente después de la Obs. 2.4.8). Para sobrellevar este problema, en el espectrograma se toman segmentos temporales cortos de una señal digital muestreada $f_{[\delta]}$, para llevarlas al dominio de la frecuencia mediante la DFT (Def. 2.4.13), y posteriormente presentar la sucesión de cada ventana transformada, donde la amplitud se representa con un colores, el eje x es el tiempo y el eje y la frecuencia ordenada de menor a mayor (Fig. 3.5). El espectrograma permite “visualizar el sonido”, e identificar aspectos del sonido que no son evidentes en el dominio del tiempo. Más detalles sobre el espectrograma se pueden consultar en [80, Sec. 10.4] y [81]. El concepto de espectrograma como una representación más del sonido, será importante especialmente para el siguiente capítulo.

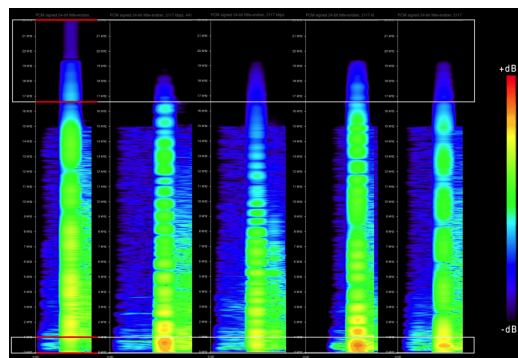


Figura 3.5: Ejemplo de un espectrograma. “Análisis de audio de la firma sonora de munición real disparada a través de una extensión de «bala de goma». (Forensic Architecture y Lawrence Abu Hamdan)”. Modificado de forensic-architecture.org.

3.1.2. Breve revisión de conceptos acústicos

La cruda realidad, es que las fórmulas que modelan la propagación e interacción del sonido en un medio y obstáculos arbitrarios, provienen de diversas ramas de la física

clásica, y dependen de una cantidad generosa de variables físicas como presión, desplazamiento, velocidad, temperatura, entropía, densidad (entre otras) [78, Sec. 1.1.3]. Al margen de esto, de manera somera, en este apartado se presentan conceptos físicos concernientes al sonido (cuando el medio de propagación es el aire o agua).

Longitud de onda, campo cercano, campo lejano y ondas planas

La **longitud de onda** asociada a un tono puro ϕ_0 , es el valor $\lambda = c_0/\phi_0$ donde c_0 m/s es la velocidad de propagación del sonido en el medio. En el caso del aire, un valor estándar es $c_0 = 343$ m/s [33, p. 32]. La longitud de onda se puede interpretar como la distancia (en metros) que la onda ha recorrido después de haber completado un periodo.

El **campo cercano** asociado a ϕ_0 se define como “la región del espacio dentro de una fracción de una longitud de onda de una fuente sonora” [82, p. 30] y el **campo lejano** es la zona mayor que una longitud de onda de la fuente sonora. Si el tono ϕ_0 se emite desde un punto $x_0 \in \mathbb{R}^3$ en algún sistema de coordenadas, entonces un punto $y \in \mathbb{R}$ estará en el campo cercano de ϕ_0 si y solo si $y \in B_{\mathbb{R}^3}(x_0, \lambda) := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x - x_0\| < \lambda\}$ (se toma la norma euclidiana usual en $\mathbb{R}^3$).

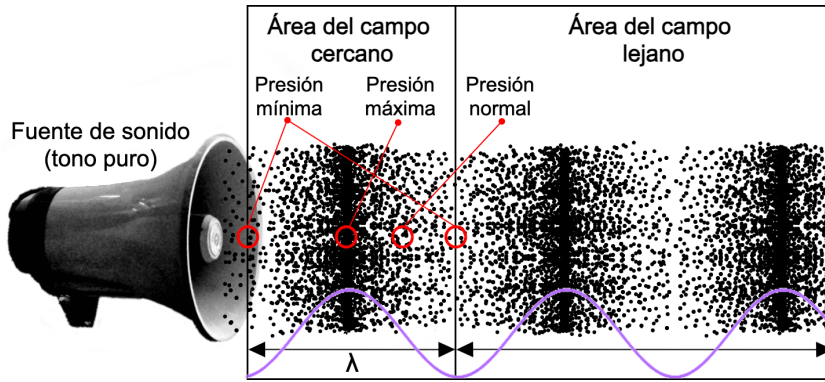


Figura 3.6: Campo cercano y campo lejano de una fuente sonora. La fuente reproduce un tono puro con frecuencia ϕ_0 , y longitud de onda $\lambda = c_0/\phi_0$, donde c_0 m/s es la velocidad de propagación del sonido en el medio.

Como la mínima frecuencia audible es 20 Hz, el máximo campo cercano de una fuente sonora audible es la esfera de radio 17.15 m centrada en la fuente sonora. Para frecuencias mayores a 343 Hz (la mayoría de las frecuencias audibles), el campo lejano siempre está a más de 1 m de distancia de la fuente, por esta razón es posible encontrar autores que definen el campo lejano cuando la distancia entre la fuente y el receptor es mayor a 1 m o 1.5 m.

Por otra parte, recordando la Figura 3.4, en esta se considera únicamente la propagación de una onda en una dimensión, al considerar todo el espacio, los tonos puros se propagan en todas las direcciones, dando lugar a ondas esféricas.

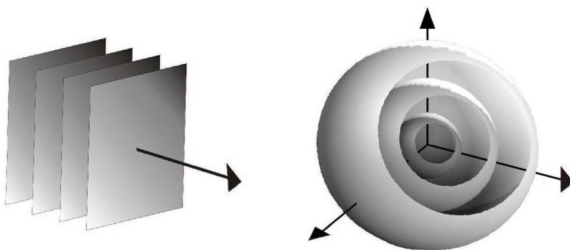


Figura 3.7: Representación de la propagación de ondas planas (planos paralelos), y ondas esféricas (esferas cuyo radio crece a medida en que se alejan de la fuente). Imagen tomada de [84, Fig. 1].

El radio de tales ondas esféricas aumenta a medida en que las ondas se alejan de su fuente, y si el receptor se encuentra a una distancia suficientemente mayor que la longitud de onda, entonces las ondas esféricas que llegan al receptor se asemejan a planos paralelos (**ondas planas**). La ventaja de considerar escenarios en el campo lejano, es que en este caso las ondas esféricas se pueden tratar como ondas planas, y el manejo de estas últimas es más amigable para explicar la interacción del sonido con obstáculos.

Intensidad (volumen)

Independientemente de las unidades de consideradas, la manera más usual de asignarle una magnitud a un sonido $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ de duración T s, es mediante la fórmula $R_{MS}(f) := \left(\frac{1}{T} \int_0^T f(t)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$. Para una función muestreada $f_{[\delta]}$ con $N \in \mathbb{N}$ muestras, se utiliza la fórmula $R_{MS}(f_{[\delta]}) = \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^N f_{[\delta]}(k)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$. Ambas asignaciones se conocen comúnmente como media cuadrática o **RMS** (*root mean square*).

Por otra parte, dada cualquier unidad u de intensidad y un valor mínimo de referencia $I_{ref} \in \mathbb{R}_{>0}$ en u unidades, siempre se puede considerar su escala asociada en **decibelios**, donde la escala nueva está dada por

$$L_{dB}(I) = 10 \log_{10} (I/I_{ref}), \quad (3.6)$$

para cualquier intensidad $I u \geq I_{ref} u$. De esta forma la unidad de referencia I_{ref} dada en u unidades, se vuelve 0 en su escala en decibelios.

En acústica, la intensidad del sonido I^4 depende de dos factores:

1. la *impedancia*, particularmente la *impedancia característica* del medio de propagación⁵ dada por la fórmula $Z_0 = \rho_0 c_0$ (suponiendo que las ondas acústicas son planas) [83, Ec. 5.10.2], donde ρ_0 es la densidad del medio (en kg/m^3) y c_0 es la velocidad de propagación del sonido en el medio⁶.
2. La presión, cuya unidad es el Pascal (Newton normal a superficie de metro cuadrado): $\text{Pa} = \text{N}/\text{m}^2 = \text{kg} \cdot \text{m}/\text{s}^2 \cdot \text{m}^2 = \text{kg}/\text{m} \cdot \text{s}^2$.

La relación entre intensidad acústica I , impedancia característica Z_0 y presión p “efectiva” (valor en Pa RMS), se da mediante la fórmula $I = Z_0^{-1} p^2$ [83, Ec. 5.9.5].

Recordando entonces la Figura 3.4, por lo mencionado hasta ahora, la unidad correspondiente a p_M son los pascals. La intensidad I (en W/m^2) de una onda sonora f^{P_1} (en Pa RMS) de duración T s, se obtiene con la fórmula

$$I = Z_0^{-1} R_{MS} \left(f^{P_1} \right)^2 \quad (3.7)$$

Aunque esto último se cumpla, usar las unidades Pa o W/m^2 resulta inviable por lo siguiente: William Yost [57, Cap. 3] menciona que si I_{ref} es la mínima intensidad acústica

⁴Por definición, la *intensidad* acústica es la energía que viaja a través de una unidad de área por unidad de tiempo (flujo de energía), y sus unidades son vatios/watts sobre metro cuadrado ($\text{W} = \text{J}/\text{s} = \text{N} \cdot \text{m}/\text{s} = \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^3$) [78, Sec. 1.4.3].

⁵Intuitivamente, a mayor sea la impedancia característica, mayor es la fuerza necesaria para mover las partículas del medio.

⁶Las unidades resultantes de la impedancia característica $(\text{kg}/\text{m}^2)(\text{m}/\text{s}) = \text{kg}/\text{m} \cdot \text{s} = \text{Rayl}$ se denominan rayleighs, en reconocimiento al trabajo del físico Lord Rayleigh (John William Strutt). En el siguiente capítulo se discutirá su llamada “teoría duplex”.

perceptible para un oído humano sano, entonces la máxima intensidad acústica antes de que el oído se destruya es

$$I_{\text{máx}} = 10^{14} I_{\text{ref}}, \quad (3.8)$$

cien billones de veces la unidad de referencia original. Por tanto, usar las unidades Pa y cubrir el *rango dinámico* humano (10^{14} unidades de intensidad), implicaría manejar funciones que toman doscientos billones de valores posibles. Aunado a lo anterior, el oído humano distingue mejor los incrementos de intensidad de manera exponencial (elevando el valor original a un número fijo) que de manera lineal (sumando algún valor fijo al valor original) [3, Sec. 1.8]. Estas razones motivan el uso de la escala en decibelios SPL (*sound pressure level*) como unidad estándar para expresar la intensidad (volumen) de un sonido. De acuerdo con Schnupp y colegas [3, Sec. 1.8], la mínima intensidad acústica perceptible ronda los 20 micro-pascales en RMS, es decir, $I_{\text{ref}} = Z_0^{-1} (20 \times 10^{-5})^2 \text{ W/m}^2$, por lo que la ecuación (3.8) indica que la máxima intensidad en el umbral del daño es $I_{\text{max}} = 10^{14} Z_0^{-1} (2 \times 10^{-6})^2 \text{ W/m}^2$. En este caso, de las ecuaciones (3.6) y (3.7) se sigue que la intensidad de una onda sonora $f^{P_1} \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ en dB SPL y de duración T_s , es

$$L_{\text{dB}}(I) := 10 \log_{10} (I/I_{\text{ref}}) = 10 \log_{10} \left(\frac{Z_0^{-1} \text{RMS}(f^{P_1})^2}{Z_0^{-1} (2 \times 10^{-7})^2} \right) = 20 \log_{10} \left(\frac{\text{RMS}(f^{P_1})}{p_0} \right),$$

donde $p_0 \text{ Pa} := 2 \times 10^{-6} \text{ Pa} = 20 \mu\text{Pa}$ (en RMS). El volumen mínimo es 0 dB SPL = $L_{\text{dB}}(I_{\text{ref}})$ y el volumen máximo (antes del daño inmediato) es $L_{\text{dB}}(I_{\text{máx}}) = 140 \text{ dB SPL}$.

Existen otros criterios para asignarle un valor de intensidad a una onda sonora, sin embargo la escala dB SPL (equipada con el criterio RMS) es de las más usadas en la literatura.

Como ya se mencionó, la escala dB admite unidades de intensidad arbitrarias, por lo que esto abre el camino para extrapolar todo lo mencionado en este apartado al caso del voltaje para la función analógica f_a , y la señal digital $f_{[\delta]}$ (en el contexto del procesamiento digital de señales, donde se usa el RMS discreto). En general, existe una estrecha relación entre variables físicas mecánicas (usadas en acústica), y variables físicas eléctricas usadas en los “circuitos RLC” [85, Tabla 3.1].

Por último, se debe enfatizar la fuerte dependencia entre intensidad y contenido espectral de la onda sonora así como una fuerte dependencia de la posición del receptor con respecto a la fuente sonora. La intensidad es menor a medida en que el punto de medición se aleja de la fuente. Una aproximación para este último fenómeno es la *ley del cuadrado inverso*, donde se asume que $\frac{I_2}{I_1} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2$, donde I_2 es la intensidad medida a una distancia r_2 (en metros) de la fuente, e I_1 la intensidad medida a una distancia r_1 de la fuente, donde $r_2 > r_1$. De esta forma se puede calcular el cambio de intensidad en dB SPL respecto a ambas fuentes, ya que

$$\frac{I_2}{I_1} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \Rightarrow L_{\text{dB}}(I_2) = L_{\text{dB}}(I_1) + 20 \log_{10} \left(\frac{r_1}{r_2}\right). \quad (3.9)$$

Por ejemplo, si $r_2 = 2r_1$, entonces $L_{\text{dB}}(I_2) = L_{\text{dB}}(I_1) + 20 \log_{10} \left(\frac{1}{2}\right) \approx L_{\text{dB}}(I_1) - 6 \text{ dB SPL}$, por esto último, la ley del cuadrado inverso también se puede expresar como la propiedad: “el nivel sonoro disminuye 6 dB por cada duplicación de la distancia” [3, p. 188].

Interacción del sonido con obstáculos

En la Figura 3.8 se considera un escenario donde el receptor se encuentra en el campo lejano de un tono puro, por lo que las ondas son representadas por líneas paralelas (que representan las ondas planas).

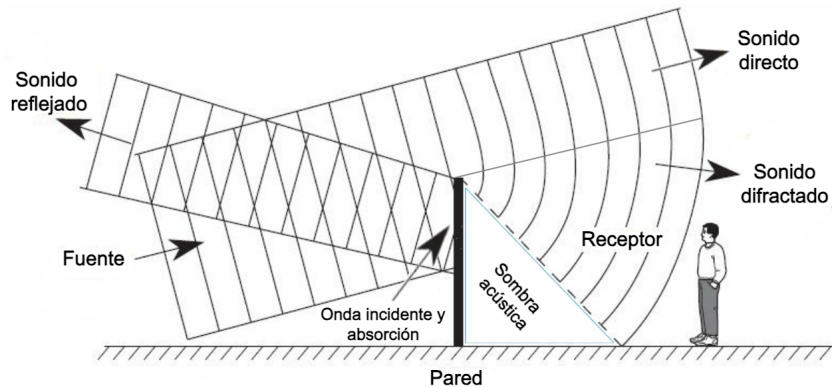


Figura 3.8: Algunos fenómenos acústicos que ocurren cuando un tono puro interactúa con un obstáculo. Figura modificada de [86, Fig. 7.3 (B)].

La separación entre las líneas paralelas representa la longitud de onda del tono puro. La fuente incide en el obstáculo, dependiendo del material y dimensiones de éste, habrá una *absorción* de la onda sonora, esto causa una reducción en su amplitud (atenuación) al momento de ser *reflejada*. La reflexión es el “rebote” de la onda en el obstáculo, es útil hacer una analogía con el caso de la luz, donde el ángulo de incidencia de un *rayo de luz* (en una superficie plana y reflejante) es el mismo que el ángulo de salida del rayo. Por otra parte, la *difracción* es la capacidad del sonido (tono puro) de rodear el obstáculo con poca o nula alteración en su amplitud. La difracción ocurre si la longitud de onda del tono es mayor o similar a las dimensiones del obstáculo [86, Cap. 7]. A medida en que la longitud de onda aumenta (frecuencia disminuye), la difracción es mayor. En contraste, a medida en que la longitud de onda disminuye (frecuencia aumenta) existe una menor difracción y la *sombra acústica* se hace más presente. La sombra se refiere a la zona donde existe una atenuación de la intensidad causada por el obstáculo, al impedir el paso de la onda incidente y al haber poca presencia del fenómeno de difracción. También hay una porción del tono original que no es afectado por el obstáculo, correspondiente al sonido directo. Existen otros fenómenos que afectan el comportamiento del sonido que no se toman en cuenta en la Figura 3.8, uno de ellos es la *refracción*, que corresponde a la “desviación” de la dirección de una onda sonora en el medio, factores como cambios en la temperatura y la presión atmosférica influyen en este fenómeno [86, Cap. 8]. Por otra parte, el conjunto de ondas sonoras que viajan en un mismo espacio crean *interferencias*, las cuales pueden ser constructivas (incrementan la amplitud de ciertas frecuencias) y destructivas (disminuyen la amplitud de ciertas frecuencias). Por último, si la onda sonora tiene suficiente intensidad, el obstáculo mismo (u objeto en el que incide la onda) puede vibrar a causa de la onda incidente, dando lugar a la *transmisión* y en algunos casos *resonancia*. La transmisión se refiere a que el obstáculo se vuelve una fuente sonora más, al oscilar en respuesta a la onda incidente y es capaz de re-transmitir el sonido. La resonancia es un concepto más general, que se refiere a la cualidad natural de objetos o escenarios físicos a “responder mejor” a una (o varios) tonos puros/frecuencias. Las frecuencias donde el objeto “responde mejor”, se denominan *frecuencias de resonancia* del objeto en cuestión. Este fenómeno se puede explicar e ilustrar con más facilidad al considerar el caso particular de los *resonadores de Helmholtz*.

Resonadores de Helmholtz y resonancia

Un resonador de Helmholtz, es una esfera de vidrio o metal con una abertura o cuello. Sean R_0 un resonador de Helmholtz, $\phi_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ su frecuencia de resonancia y $\phi_1 \in \mathbb{R}_{>0}$ cualquier otra frecuencia, luego considérense dos escenarios.

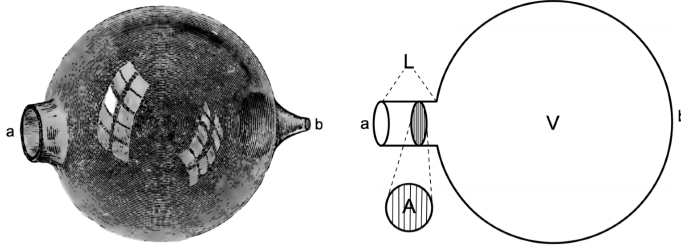


Figura 3.9: Resonador de Helmholtz hecho de vidrio [79, Fig. 16 a], y diagrama de un resonador ideal con los elementos que determinan su frecuencia de resonancia ϕ_0 .

Escenario 1. Una fuente de sonido en un punto P_0 cercano a R_0 , emite el tono ϕ_0 con una intensidad I_0 . Sea $f_w : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ la función que modela la intensidad acústica medida por T segundos, en algún punto P_1 cercano a la salida del cuello L .

Escenario 2. Una fuente de sonido en P_0 , emite el tono ϕ_1 con intensidad I_0 . Sea $g_w : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ la función que modela la intensidad medida en el mismo punto P_1 .

En ambos casos, las ondas que inciden en R_0 harán que las partículas de aire en el resonador vibren de forma simpática a las ondas incidentes, “el fluido compresible en el resonador actúa como un resorte” [33, p. 94], por lo que en el cuello del resonador se generan ondas acústicas. Entonces, el fenómeno de resonancia se refiere a que siempre ocurrirá que $\max_{t \in [0, T]} f_w(t) \geq \max_{t \in [0, T]} g_w(t)$, es decir, la intensidad en el cuello L siempre es mayor cuando el tono puro incidente en R_0 es ϕ_0 .

En un resonador ideal, la frecuencia de resonancia ϕ_0 se determina con la fórmula $\phi_0 = c_0 \sqrt{\frac{A}{LV}}$ [33, Ec. 3.601], donde c_0 es la velocidad del sonido en el aire, A es el área de la sección transversal del cuello, L es la longitud del cuello y V es el volumen total del resonador.

El resonador de Helmholtz ayuda como modelo o prototipo para comprender el fenómeno de resonancia acústica y extrapolarlo a casos más generales. Cualquier objeto con cavidades, así como cualquier lugar encerrado (habitación, cueva, túnel, etc.), tendrán una o varias frecuencias de resonancia acústica asociadas (así como frecuencias de anti-resonancia), es decir frecuencias que el objeto o escenario: amplifica de manera natural en respuesta a una onda sonora (resonancia), o bien atenúa de manera natural (anti-resonancias)⁷. Los fenómenos de resonancia y anti-resonancia aplican también a circuitos eléctricos, y especialmente a escenarios en mecánica donde se involucran resortes [83, Sec. 9]⁸.

El último fenómeno acústico que se menciona, es el de *difusión*, que corresponde a

⁷Un ejemplo muy ilustrativo de este fenómeno es la obra de Alvin Lucier: *I Am Sitting in a Room* (1969). La obra es una grabación de una serie de grabaciones construidas de manera iterada en vivo. Todo comienza con Lucier grabando su propia voz en un cuarto, sea esta la grabación 1, denotada G_1 , después reprodujo G_1 en el mismo cuarto y grabó (nuevamente) la respuesta del cuarto ante G_1 obteniendo así una nueva grabación G_2 . De esta forma, la n -ésima grabación G_n , se obtiene grabando la respuesta al cuarto ante la reproducción de G_{n-1} . Cada iteración filtra la voz a través de la respuesta del cuarto. Después de 31 iteraciones lo único que se escucha son los tonos puros que corresponden a las frecuencias de resonancia del cuarto.

⁸En algunos casos, estos fenómenos son modelados con ecuaciones diferenciales ordinarias y lineales, por lo que la teoría de sistemas LIT aplica, y la función de transferencia asociada tiene toda la información de las atenuaciones y amplificaciones de frecuencias. No se entrará en estos detalles.

“la distribución en el ángulo sólido de flujo de energía sonora” [87, p. 1358], y es de particular interés en el diseño de salas de concierto, teatros, cines, parlamentos, auditorios, salones de conferencia etc, donde se busca que el sonido llegue a todas las personas de manera clara y efectiva. Si bien muchos de estos problemas se pueden subsanar con la ayuda de tecnologías de audio actuales, el problema del diseño de un correcto escenario acústico sigue sin ser trivial. En el artículo “*Architectural acoustics*” [87] de 1966, Manfred Schroeder explica las dificultades y factores importantes a tener en cuenta en el diseño de una sala de concierto. Un trabajo más reciente respecto a este tema se puede consultar en [88].

Campo libre y campo difuso

Al combinarse los fenómenos mencionados hasta ahora en un lugar cerrado, se crean una *reberveración*, que corresponde a todas las interacciones que ocurren entre la onda sonora (fuente) y los obstáculos del escenario particular. Por lo anterior, se pueden distinguir entre dos escenarios posibles.

El **campo libre** (o abierto) se refiere a un ambiente carente de superficies u obstáculos que puedan reflejar una onda sonora. Las cámaras anecóicas buscan simular este escenario. Las paredes de estos cuartos están diseñadas para absorber lo mejor posible cualquier onda sonora incidente. De este modo, todo cuerpo opaco dentro del campo libre, únicamente recibirá el *sonido directo* (Fig. 3.8) de una fuente. Un ambiente como este, es útil para estudiar la interacción del sonido con algún objeto particular, ya que se tiene la ventaja de poder prescindir de cualquier reflexión que pueda crear alguna interferencia no deseada.

En contraste, el **campo difuso** es cualquier ambiente con obstáculos capaces de reflejar las ondas sonoras. Este ambiente es el más común para el ser humano (es raro que encontrarse en un entorno anecoico).

3.2. ¿La propagación del sonido es un sistema LIT?

Al buscar aplicar las definiciones y conceptos de la teoría del control al fenómeno físico de la propagación del sonido, una propuesta preliminar o punto de partida, es considerar el sistema $\Sigma^A = (\mathbb{R}, \mathcal{X}, \mathcal{U}, \phi_\Sigma)$ (asociado a un conjunto $A \subset \mathbb{R}^3$) donde:

1. $A \subset \mathbb{R}^3$, es no vacío y compacto, que se interpreta como la forma del lugar donde se propaga el sonido (ambiente)⁹.
2. El espacio de estados $\mathcal{X}$ es el conjunto de los valores de la presión posibles en cada uno de los puntos del medio de propagación A , es decir $\mathcal{X} = \mathbb{R}^A$ (el sistema es de dimensión infinita).
3. El espacio de entradas es $\mathcal{U} = \mathbb{R}$, ya que las entradas admisibles del sistema son funciones $f^{\hat{x}} \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$, que corresponden a onda sonoras emitidas desde un punto $\hat{x} \in A$. El sistema Σ^A es completo respecto al conjunto $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$.

⁹Es necesario tomar en cuenta (al menos) la forma del lugar, pues en la sección anterior se mostró como los fenómenos de reflexión, difracción, sombra etc., dependen fuertemente de los obstáculos, dimensiones y en general las características físicas del lugar donde se emite la onda.

4. La evaluación $\phi_\Sigma(\tau, \sigma, x_0, f^{\hat{x}})$ de la función de transición indica todos los valores de la presión en cada punto de A al tiempo τ , en respuesta a un sonido $f^{\hat{x}} : [\sigma, \tau] \rightarrow \mathbb{R}$.

Además de lo anterior, es razonable considerar el sistema como invariante en el tiempo, ya que un sonido emitido en un tiempo t_0 , no creará distintos efectos que un sonido emitido en un tiempo $t_1 > t_0$ (desde el mismo estado x_0) en el ambiente A .

Para cada par de puntos en el ambiente, $P_0, P_1 \in A$, donde el punto P_0 correspondiente a la posición de una fuente sonora, y el punto P_1 corresponde a la posición de recepción de la fuente, se define el “sub-sistema” $\Sigma_{P_0, P_1}^A = (\mathbb{R}, \mathcal{X}, \mathcal{U}, \phi)$ del sistema Σ^A , donde:

1. El espacio de estados $\mathcal{X}$ corresponde a los valores de presión en el punto P_1 , es decir $\mathcal{X} = \mathbb{R}$.
2. $\mathcal{U} = \mathbb{R}$ corresponde al espacio de entradas, que en este caso son únicamente fuentes sonoras emitidas desde el punto P_0 .
3. La evaluación $\phi(\tau, 0, x_0, f^{P_0})$ de la función de transición indica el valor de la presión en el punto P_1 , en respuesta a una fuente $f^{P_0} \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ de duración τ segundos.

El sistema $\Sigma_{P_0, P_1}^A = (\mathcal{T}, \mathcal{X}, \mathcal{U}, \phi) = (\mathbb{R}, \mathbb{R}, \mathbb{R}, \phi)$ ya es de dimensión finita y por tanto candidato a la teoría expuesta en el capítulo anterior. Σ_{P_0, P_1}^A también es un comportamiento i/s $\Lambda_{\Sigma_{P_0, P_1}^A, 0} = (\mathbb{R}, \mathcal{X}, \mathcal{U}, \lambda)$ (Def. 2.2.6), donde la función de respuesta λ es

$$\lambda^{0, \tau}(f^{P_0}) = \phi(\tau, 0, 0, f^{P_0}).$$

La función λ representa el valor de la presión en el punto $P_1 \in A$ ante cualquier fuente sonora f^{P_0} , y en el tiempo final τ . Para relajar la notación, sea

$$\Lambda_{P_1}^{P_0} := \Lambda_{\Sigma_{P_0, P_1}^A, 0}. \quad (3.10)$$

El comportamiento $\Lambda_{P_1}^{P_0}$ es el indicado para explicar la captura de HRTFs, pues cuando P_1 es un punto cercano al canal auditivo humano, el comportamiento $\Lambda_{P_1}^{P_0}$ (o sistema¹⁰) es el que Watanabe y colegas mencionan en su artículo sobre captura de HRTFs: “la ruta de propagación del sonido desde la fuente de sonido en una dirección determinada hasta la entrada del canal auditivo del sujeto” [19, p. 160].

Lo que se pretende discutir en lo que resta de esta sección, es la siguiente afirmación:

el comportamiento $\Lambda_{P_1}^{P_0}$ es LIT continuo, es decir, es lineal, integral e invariante en el tiempo, y además es UBIBO.

(3.11)

La afirmación (3.11) justifica el poder aplicar toda la teoría de obtención de respuestas al impulso, convolución, función de transferencia etc, al fenómeno de la propagación del sonido (de un punto emisor P_0 , a un punto receptor P_1). Sin embargo, se debe advertir, en esta tesis no se justificará rigurosamente (3.11), solamente se mencionarán argumentos para respaldarla.

Para justificar la afirmación (3.11), se tienen al menos dos alternativas:

¹⁰En la literatura sobre captura de HRTFs, no se usa la terminología de Eduardo Sontag, por lo que se usa el término sistema como sinónimo comportamiento (caja negra).

1. verificar que el sistema Σ_{P_0, P_1}^A es lineal, ya que de esta forma su comportamiento asociado $\Lambda_{P_1}^{P_0}$ es LIT (Obs. 2.2.30 y Prop. 2.2.32), o bien
2. verificar (3.11) directamente.

En ambos casos la invarianza al tiempo ya se cumple. La linealidad también es una propiedad bien reconocida y usada en acústica cuando las intensidades no rebasan un umbral.

Los fenómenos de pequeña amplitud se pueden describir con una buena aproximación en términos de ecuaciones lineales diferenciales y algebraicas. Dado que los fenómenos acústicos son típicamente de pequeña amplitud, el análisis que acompaña a la mayoría de las aplicaciones de la acústica, en consecuencia, se basa en una teoría linealizada, brevemente denominada *acústica lineal* [33, p. 27].

Por tanto, no está en tela de juicio considerar la función $\lambda^{0, \tau}(\cdot) = \phi(\tau, 0, 0, \cdot)$ como lineal, es decir

$$\lambda^{0, \tau}(af^{P_0} + bg^{P_0}) = a\lambda^{0, \tau}(f^{P_0}) + b\lambda^{0, \tau}(g^{P_0})^{11}, \quad (3.12)$$

El problema, o la dificultad yace en verificar los demás requerimientos que exige el sistema axiomático de Eduardo Sontag. Tomar la primer alternativa (verificar que el sistema Σ_{P_0, P_1}^A es lineal) implica verificar que Σ_{P_0, P_1}^A cumple la Definición 2.2.26, es decir (entre otras cosas), se debe verificar que se trata de un sistema continuo de clase C^1 , con lado derecho g , tal que $\phi(\tau, 0, 0, f^{P_0}) = \xi(\tau)$, donde ξ es solución (única) de un PVI con la forma $\dot{\xi}(t) = g(t, \xi(t), f^{P_0}(t))$, $\xi(0) = 0$. Esta alternativa exige ahondar en las ecuaciones diferenciales que gobiernan el sonido. Una candidata inmediata a tomar en cuenta es la *ecuación de onda* (en una dimensión), sin embargo esta última es una ecuación parcial de segundo orden, y (en principio) no es posible verla como una EDO lineal, además de que hace falta tomar en cuenta los efectos de reflexión, refracción etc, del ambiente A .

La segunda alternativa es mostrar que $\Lambda_{P_1}^{P_0}$ cumple la Definición 2.2.29, que (entre otras cosas), implica verificar que

- (a) $\lambda^{0, \tau}$ es un operador lineal (acotado),
- (b) $\lambda^{\sigma, \tau}(\mathbf{0} \oplus f^{P_0}) = \lambda^{\mu, \tau}(f^{P_0})$, donde $\mathbf{0}$ es la enterada idénticamente igual a 0 en $[\sigma, \mu)$,
- (c) por la Proposición 2.27, se debe mostrar que existe un *kernel*

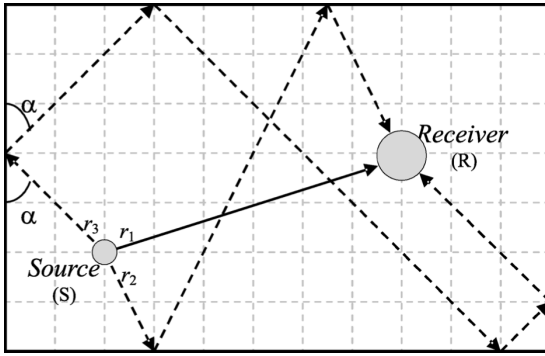
$$K \in L_{loc}^{\infty}(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}^2), \text{ tal que } \widetilde{K}(t, \tau) = K(t - \tau) \text{ p.c.t. } \tau \leq t$$

$$\text{donde } \lambda^{0, \tau}(f^{P_0}) = \int_0^{\tau} K(\tau - s) f^{P_0}(s) ds, \text{ para todo } \tau \in \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

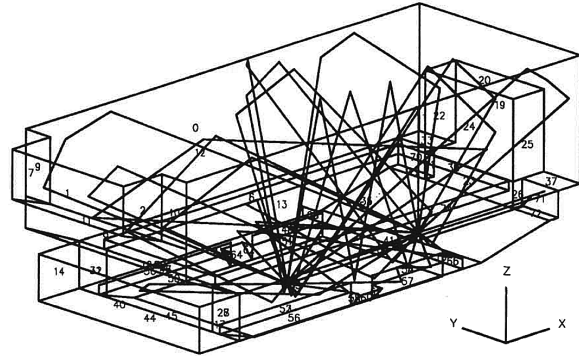
El inciso (a) se justifica debido a lo mencionado en (3.12), además de que el operador en efecto es acotado, pues un sonido siempre decae en intensidad (esto justifica también que el comportamiento es UBIBO). El inciso (b) también se cumple, pues el sistema no responde hasta que se emite un sonido en el punto P_0 . Respecto al inciso (c), Pablo Fichtl [69, Cap. 1] menciona en su tesis como es posible justificar de manera heurística la existencia de un *kernel* para el comportamiento $\Lambda_{P_1}^{P_0}$: tomando en cuenta el fenómeno

¹⁰Se presupone que esto se cumple siempre que $f^{P_0}, g^{P_0} \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ y $a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ sean tales que $af^{P_0} + bg^{P_0}$ no exceda una intensidad determinada, donde el sonido pierde la cualidad de ser lineal.

de reflexión, un sonido f^{P_0} dará como resultado en el punto de recepción P_1 la suma de “copias” del mismo sonido f^{P_0} , pero con cambios en intensidad y desfasadas en el tiempo, así se justifica que $f^{P_1}(t) \xrightarrow{\lambda^{0,\tau}} \int_0^\tau K(\tau-s)f^{P_0}(s)ds$, donde K posee la información de todas las atenuaciones correspondientes para cada instante. Esta última concepción está muy ligada al método de modelado acústico geométrico (*ray tracing*), donde se busca simular la respuesta al impulso (discreta) de un cuarto con superficies interiores planas. Este método considera la propagación del sonido como rayos (rectas en $\mathbb{R}^3$) que parten del punto de la fuente P_0 y siguen trayectorias (en todas direcciones) hasta llegar a una pared u obstáculo, donde se “refleja” el rayo con el mismo ángulo de incidencia (ley de Snell). Posteriormente se analiza el conjunto de rayos cuya trayectoria coincide con un área (previamente elegida) centrado en el punto de recepción P_1 , y con esta última información es posible reconstruir una RI de un sistema LIT discreto.



(a) [89, Fig. 1]



(b) [90, Fig. 2]

Figura 3.10: (a) Representación bidimensional del modelado acústico *ray tracing*, a partir de la fuente (S) se proyectan rayos en distintas direcciones y únicamente se toman en cuenta las trayectorias que llegan al área del receptor (R). Cada rayo tiene asociado un retraso en el tiempo respecto al sonido que incide de manera directa (r_1), y también tiene asociada una intensidad, tanto el retraso como la intensidad dependen del número de reflexiones y la longitud total de la trayectoria. En (b) se busca representar gráficamente el caso tridimensional (modelo de una sala de concierto), los rayos son las trayectorias que parten de la fuente y llegan a una zona cercana al receptor.

En [89] se dan detalles de una técnica para este método de modelado. En [90, 91] se puede consultar un resumen de las distintas técnicas de modelado geométrico para reverberación en cuartos¹², y en [93, Cap. 2] se discute el origen histórico de este método.

Todo lo mencionado hasta ahora muestra que hay distintos caminos posibles para justificar la afirmación (3.11). Es legítimo hacer la crítica: si no se da una prueba rigurosa de (3.11) ¿por qué habría de suponerse por verdadera? Una respuesta inmediata es que, *experimentalmente*, al tratar el comportamiento $\Lambda_{P_1}^{P_0}$ como LIT, se obtienen resultados favorables (como si en efecto se tratase de un sistema LIT continuo UBIBO), una evidencia de esto último es la efectividad de los filtros HRTF.

¹²Estos métodos son usados en la actualidad por su bajo costo computacional y eficacia (al menos para tener una respuesta al impulso preliminar de la reverberación de un cuarto). El paquete lanzado en 2018 para Python: “*Pyroomacoustics*” [92] busca construir RIs de cuartos con fuentes y receptores arbitrarios utilizando métodos geométricos.

3.3. Medición directa de HRTFs

3.3.1. El impulso en acústica y las señales de prueba (*test signals*)

Bajo la suposición (que de ahora en adelante se dará por verdadera) de que $\Lambda_{P_1}^{P_0}$ en (3.10) sea LIT continuo y UBIBO, se puede asegurar que $\Lambda_{P_1}^{P_0}$ tiene asociada una respuesta al impulso $K_{P_1}^{P_0} : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ integrable (Obs. 2.2.35 y Prop. 2.3.4), única (Prop. 2.2.31), que caracteriza el sistema mediante la convolución continua (Obs. 2.2.35), y la cual se puede aproximar tomando como entrada algún impulso (Def. 2.3.10). Recordando la Figura 2.3, al extrapolar el concepto de impulso al caso del sonido, se tiene que, *grosso modo*, un impulso acústico es un sonido de duración corta e intensidad alta. Desde el siglo pasado, para lograr un sonido con estas características, se ha recurrido a una variedad de recursos como: “pistolas que disparan cartuchos de fogeo, globos que explotan o bolsas de papel y fuentes de chispas eléctricas” [88, p. 315]. Estos últimos métodos son efectivos si los escenarios tienen dimensiones pequeñas. Para el caso de un entorno más grande (por ejemplo una sala de conciertos), es necesario un sonido con más energía. Manfred Schroeder comenta como, ante la tarea de capturar las RIs de una sala de conciertos (asociadas a distintos micrófonos distribuidos en toda la sala), tuvo que recurrir al uso de un pequeño cañón artillero (esto se desarrolla en el año 1963):

Las mediciones exteriores del impulso del cañón fueron alentadoras en cuanto a energía, duración de la ráfaga y repetibilidad. Con el cañón colocado en el escenario de la Filarmónica y los micrófonos distribuidos entre el público, disparamos el cañón. El fuerte estallido de energía envió ondas sonoras por toda la sala que fueron captadas por todos los micrófonos. El fuerte sonido llamó la atención del director de la sala, quien entró inmediatamente y entró en pánico porque la visibilidad era mala debido al humo de la explosión. El director prohibió más disparos e inmediatamente comenzó a intentar disipar el humo y el olor del cañón antes de la actuación de la noche [93, p. 4].

Actualmente hay herramientas disponibles más sofisticadas para emitir un impulso, como un “altavoz omni-direccional” [88, p. 315].

En la teoría, emitir un impulso $\rho^{P_0}(t)$ y registrar el resultado en el punto P_1 corresponde a realizar la evaluación $\rho^{P_0} \xrightarrow{\bar{\lambda}} \bar{\lambda}(\rho^{P_0}) \approx K_{P_1}^{P_0}$, de la función de salida, es decir, se aproxima la respuesta al impulso del comportamiento $\Lambda_{P_1}^{P_0}$ (ver (2.32)).

Existen otras señales de prueba (*test signals*), a partir de las cuales también es posible obtener la RI de un escenario acústico con ayuda de la síntesis (ver Fig. 2.7). La idea básica es la siguiente: sea $f_0^P(t)$ cualquier onda sonora con ancho de banda $\xi_{\text{máx}}$, la función de transferencia sinusoidal $\mathcal{F}(K_{P_1}^{P_0})(\xi) = \hat{K}_{P_1}^{P_0}(i2\pi\xi)$ (ver Obs. 2.4.8) cumplirá que

$$\mathcal{F}(K_{P_1}^{P_0})(\xi) = \frac{\mathcal{F}(\bar{\lambda}(f))(\xi)}{\mathcal{F}(f_0^P)(\xi)} \quad \forall \xi \in [0, \xi_{\text{máx}}], \quad (3.13)$$

es decir, la función de transferencia sinusoidal (en el rango de frecuencias $[0, \xi_{\text{máx}}]$) se puede obtener dividiendo la TF de la salida con la TF de la entrada. Posteriormente, la RI en el intervalo $[0, \xi]$ se puede obtener aplicando la TF inversa al cociente en (3.13) (Teo. 2.4.7). Por ejemplo, una señal de prueba usada en la actualidad es la *sine sweep*, que esencialmente realiza un “barrido” continuo de todas las frecuencias audibles, detalles de

esté método se mencionan en [94], y una implementación de este método de captura se puede consultar en [69, Sec. C3]. Otra señal de prueba es el AOTSP o “impulso alargado y optimizado de Aoshima”, los detalles de este caso se muestran en [95].

3.3.2. La teoría detrás de la medición directa de HRTFs

Con todo lo mencionado hasta ahora, es posible explicar el funcionamiento y escenario de la medición de HRTFs. Se considera un ambiente anecoico con un sujeto de pruebas presente, y los comportamientos $\Lambda_{\mathbf{L}}^P$, $\Lambda_{\mathbf{R}}^P$, donde $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^3$ es un punto en el canal auditivo izquierdo, $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^3$ el derecho y $P \in \mathbb{R}^3$ es cualquier punto alrededor de la persona, todo esto desde el sistema de coordenadas referido a la cabeza o SCRC (Fig. 1.1). Sean $\bar{\lambda}_{\mathbf{L}}^P$ y $\bar{\lambda}_{\mathbf{R}}^P$ las funciones de salida respectivas. Producir un impulso $\rho^P(t) \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$, corresponde a las evaluaciones

$$\bar{\lambda}_{\mathbf{L}}^P(\rho^P)(t) =: k_{\mathbf{L}}^P(t) \approx K_{\mathbf{L}}^P(t) \quad \text{y} \quad \bar{\lambda}_{\mathbf{R}}^P(\rho^P)(t) =: k_{\mathbf{R}}^P(t) \approx K_{\mathbf{R}}^P(t), \quad (3.14)$$

que aproximan las respuestas al impulso $K_{\mathbf{L}}^P, K_{\mathbf{R}}^P \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ de los comportamientos en cuestión. Las ondas sonoras $k_{\mathbf{L}}^P$ y $k_{\mathbf{R}}^P$ se capturan en los puntos $\mathbf{L}, \mathbf{R} \in \mathbb{R}^3$ con micrófonos, por lo que se da la siguiente transición entre representaciones del sonido:

$$\underbrace{k_{\mathbf{L}}^P}_{\text{onda sonora}} \mapsto \underbrace{k_{\mathbf{L}}^P}_{\text{señal analógica}} \mapsto \underbrace{k_{\mathbf{L}}^P}_{\text{señal muestreada}}[\delta] \in \ell_{\mathbb{Q}}, \quad (3.15)$$

y de igual forma para $\mathbf{R}$. En las transformaciones (3.15), la Obs. 2.4.14 juega un papel crucial, pues se está haciendo la transición de los comportamientos LIT continuos $\Lambda_{\mathbf{L}}^P$ y $\Lambda_{\mathbf{R}}^P$, a los comportamientos muestreados asociados $\Lambda_{\mathbf{L}}^P[\delta]$ y $\Lambda_{\mathbf{R}}^P[\delta]$, a través del muestreo de las respuestas al impulso (aproximadas) $k_{\mathbf{L}}^P$ y $k_{\mathbf{R}}^P$. Una frecuencia de muestreo adecuada (por ejemplo $\delta^{-1} = 44.1$ kHz), junto con un filtro *anti-aliasing*, en la señal analógica antes de muestrear, garantizarán que $k_{\mathbf{L}}^P[\delta]$ simule el comportamiento original LIT continuo $\Lambda_{\mathbf{L}}^P$ al menos para frecuencias $\xi \in [0, \frac{1}{2\delta}]$, es decir, el espectro de Fourier de la convolución discreta $k_{\mathbf{L}}^P[\delta] * f_{[\delta]}$, será el mismo que el de la convolución continua $k_{\mathbf{L}}^P * f^{P_0} \approx \bar{\lambda}_{\mathbf{L}}^P(f^{P_0})$ para tales frecuencias, y donde $f_{[\delta]}$ es una función muestreada con ancho de banda $\frac{1}{2\delta}$.

Teóricamente, las respuestas al impulso $k_{\mathbf{L}}^P$ y $k_{\mathbf{R}}^P$ deberían ser suficientes para emular los estímulos de la localización de una onda sonora emitida desde el punto P , sin embargo, en la literatura se enfatiza que tales RIs se deben de “ecualizar”. En la práctica, cuando se busca capturar las RIs $k_{\mathbf{L}}^P$ y $k_{\mathbf{R}}^P$, ocurre que estas no se obtienen en estado “puro”, sino alteradas por las condiciones particulares de la cámara anecoica junto con las características específicas del equipo de captura. Por lo anterior, es necesario considerar un tercer comportamiento Λ_0^P (con RI q_0^P), esta vez con el sujeto de pruebas ausente, es decir, se mide la RI del escenario anecoico desde el punto de emisión al origen del SCRC con el sujeto de pruebas ausente. Sea entonces $\Lambda_0^P[\delta]$ el comportamiento muestreado asociado con RI $q_0^P[\delta]$ y función de salida $\bar{\lambda}_{0\delta}^P$. Se espera que el impulso (emitido desde el punto P) capturado en la posición del oído sea filtrado previamente por el comportamiento Λ_0^P , es decir, para el impulso ρ^P , a diferencia del caso ideal en (3.14), se prevé que $k_{\mathbf{L}}^P[\delta] * q_0^P[\delta]$ sea la RI de $\Lambda_{\mathbf{L}}^P[\delta]$ y $k_{\mathbf{L}}^P[\delta] * q_0^P[\delta]$ sea la RI de $\Lambda_{\mathbf{R}}^P[\delta]$. Esto último justifica la definición de HRTF

“oficial”, encontrada en la literatura¹³: **la función de transferencia referida a la cabeza o HRTF** (para cada oído) se define como la función de transferencia $\hat{h}_{\mathbf{L}}^P$ y $\hat{h}_{\mathbf{R}}^P$, donde

$$\hat{h}_{\mathbf{L}}^P := \frac{\hat{\lambda}_{\mathbf{L}\delta}^P(f_{[\delta]})}{\hat{\lambda}_{0\delta}^P(f_{[\delta]})} = \frac{\hat{k}_{\mathbf{L}}^P}{\hat{q}_0^P} \quad \text{y} \quad \hat{h}_{\mathbf{R}}^P := \frac{\hat{\lambda}_{\mathbf{R}\delta}^P(f_{[\delta]})}{\hat{\lambda}_{0\delta}^P(f_{[\delta]})} = \frac{\hat{k}_{\mathbf{R}}^P}{\hat{q}_0^P}, \quad (3.16)$$

por lo que en el dominio tiempo, las igualdades en (3.16) corresponden a las RIs (llamadas HRIRs - *head-related impulse responses*) dadas por

$$h_{\mathbf{L}}^P := \bar{\lambda}_{\mathbf{L}\delta}^P(f_{[\delta]}) * \left(\bar{\lambda}_{0\delta}^P(f_{[\delta]}) \right)^{-1} = k_{\mathbf{L}}^P * (q_0^P)^{-1} \quad \text{y} \quad (3.17)$$

$$h_{\mathbf{R}}^P := \bar{\lambda}_{\mathbf{R}\delta}^P(f_{[\delta]}) * \left(\bar{\lambda}_{0\delta}^P(f_{[\delta]}) \right)^{-1} = k_{\mathbf{R}}^P * (q_0^P)^{-1}.$$

Añadir el término $(q_0^P)^{-1}$ y $(\hat{q}_0^P)^{-1}$ en las ecuaciones (3.16) y (3.17) se conoce como la operación de ecualización, y la motivación detrás (como se había mencionado previamente), es que q_0^P “contiene todos los factores externos de los HRTF medidos, incluida la fuente de sonido y los equipos de reproducción del sistema de prueba. [...] [la ecualización] se puede utilizar para eliminar los efectos de las respuestas de las fuentes de sonido en las respuestas de magnitud y fase de los HRTF” [20]. El HRTF es la función de transferencia obtenida con el cociente de las funciones de transferencia asociadas a $\Lambda_{\mathbf{L}}^P$ y Λ_{0}^P [19] (y de manera análoga para el oído derecho). Estrictamente hablando, las HRTFs $\hat{h}_{\mathbf{L}}^P$ y $\hat{h}_{\mathbf{R}}^P$ correspondientes al comportamiento cuyas entradas son sonidos emitidos en el origen del SCRC (con el sujeto de pruebas ausente) y cuyas salidas son el sonido que llega al oído respectivo del sujeto de pruebas (desde el punto P) [97]. Tal comportamiento no puede existir físicamente y es contra-intuitivo, sin embargo, la motivación detrás de la definición (3.16) es eliminar las posibles alteraciones del escenario de captura mediante la ecualización.

Con lo mencionado hasta ahora, el filtro HRTF asociado al punto $P = (\rho_0, \theta_0, \phi_0)$ (y a una persona particular) en el dominio tiempo, se puede expresar como la función

$$\begin{aligned} \text{HRTF}(\rho_0, \theta_0, \phi_0) : \ell_{\mathbb{Q}} &\rightarrow \ell_{\mathbb{Q}} \times \ell_{\mathbb{Q}} \\ f_{[\delta]} &\mapsto \text{HRTF}(\rho_0, \theta_0, \phi_0)(f_{[\delta]}) := \left(h_{\mathbf{L}}^P * f_{[\delta]}, h_{\mathbf{R}}^P * f_{[\delta]} \right), \end{aligned} \quad (3.18)$$

que se debe interpretar como una señal estéreo (la primer entrada se dirige al canal izquierdo y la segunda al derecho). El filtro en el dominio de la frecuencia corresponde a la función

$$\begin{aligned} \widehat{\text{HRTF}}(\rho_0, \theta_0, \phi_0) : \mathbb{C}^{\mathbb{C}} &\rightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}^{\mathbb{C}} \\ \hat{f}_{[\delta]} &\mapsto \widehat{\text{HRTF}}(\rho_0, \theta_0, \phi_0)\hat{f}_{[\delta]} := \left(\hat{h}_{\mathbf{L}}^P \hat{f}_{[\delta]}, \hat{h}_{\mathbf{R}}^P \hat{f}_{[\delta]} \right). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Se enfatiza que las RIs $h_{\mathbf{L}}^P, h_{\mathbf{R}}^P \in \ell_{\mathbb{Q}}$ tienen duración finita, es decir, existe $N \in \mathbb{N}$

¹³Dada por primera vez por Jens Blauert de acuerdo a Møller [96].

tal que $h_{L[\delta]}^P(k) = 0$ para toda $k > N$. Un resultado que no se mencionó en el capítulo anterior, asegura que toda RI finita (sucesión de Markov finita), siempre puede realizarse (ver [30, p. 293]), por tanto, como $\Lambda_{L[\delta]}^P$ y $\Lambda_{R[\delta]}^P$, son realizables, las transformadas Z de las RIs dan lugar a un cociente de polinomios en $s \in \mathbb{C}$ con coeficientes en $\mathbb{R}$ (Obs. 2.3.19).

Desde el punto de vista del procesamiento las sucesiones $h_{L[\delta]}^P$ y $h_{R[\delta]}^P$ corresponden a los coeficientes de un “filtro FIR” (*finite impulse response*) [98, Sec. 5.3.3] y [100].

Todo lo mencionado en esta sub-sección buscó explicar, teóricamente y desde un punto de vista matemático, la razón de ser de la Ecuación (1.1), que era una de las preguntas que dieron origen a esta tesis. Como se mencionó en la introducción, sorprendentemente, escuchar $h_L^P * f_{[\delta]}$ en el oído izquierdo, y $h_R^P * f_{[\delta]}$ en el derecho por el misma persona asociada a las RIs, crea la ilusión auditiva (tan realista que puede ser indistinguible del escenario real [22] y [23, Sec. 22.3]) de escuchar f siendo emitida desde P^{14} . La Figura 3.11 busca ilustrar como el escenario real logra emular satisfactoriamente el escenario simulado o virtual.

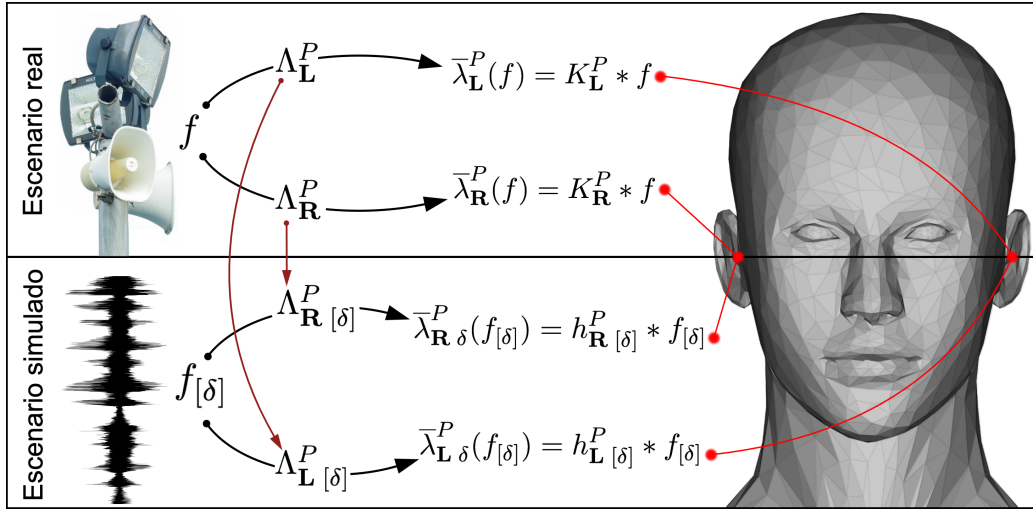


Figura 3.11: Escenario real (físico) vs. escenario simulado o virtual del HRTF (DSP). Por un lado, un sonido f es emitido desde un punto P en SCRC, que al interactuar con el ambiente da lugar a dos salidas en el oído. Por otra parte, en el escenario virtual se parte de una función δ -muestreada $f_{[\delta]}$, que es filtrada por el HRTF y emitida directamente en los oídos.

La misma configuración de captura de HRTFs aplica a cualquier ambiente, por lo que este método funciona para modelar la audición espacial en un sentido más general, donde se toma en cuenta la reverberación. Esto último da lugar a los filtros BRIRs (*binaural room impulse responses*), que pueden ser capturados de manera análoga al HRTF (únicamente cambiando el ambiente anecoico por un ambiente particular con reverberación), y en este caso se les denomina BRIRs “medidos”, por otra parte, también es posible tomar un HRTF en el dominio tiempo y convolucionarlo con la RI de un cuarto para obtener una BRIR “sintetizada” [96, Sec. 7].

Como se argumentó en el capítulo anterior, la función de transferencia sinusoidal (Obs. 2.4.8) provee la información necesaria para saber en qué medida la amplitud y la fase es

¹⁴Esto puede considerarse como una evidencia empírica de la afirmación (3.11).

afectada por el comportamiento. En este caso la función de variable real y codominio real $\xi \mapsto |\hat{h}_{\mathbf{L}}^P[\delta](i2\pi\xi)|$, se denomina función de transferencia de magnitud, y la función $\xi \mapsto \arg(\hat{h}_{\mathbf{L}}^P[\delta](i2\pi\xi))$ se denomina la función de transferencia de fase, ambas asociadas al HRTF correspondiente al punto P en el SCRC. Los diagramas de Bode asociados a ambas gráficas ayudan a la investigación de la audición espacial, pues son una representación visual que sintetiza cómo son afectadas las frecuencias (audibles) del comportamiento asociado al HRTF. Tales diagramas ayudan a comprender las llamadas pistas espectrales. Esto último se retomará con más atención en el siguiente capítulo.

3.3.3. Breve vistazo a la práctica: captura de HRTFs en cámaras anecóicas

El enfoque de la sección anterior fue muy teórico, en la práctica se deben tener en cuenta varios factores para una correcta medición de HRTFs. En un reporte técnico publicado en 2014 [19], Watanabe y colegas documentan el procedimiento de captura de HRTFs para 105 sujetos de prueba. La Figura 3.12 muestra la configuración usada.

El diagrama muestra al sujeto de pruebas al centro de un arreglo de altavoces circular de radio 1.5 m. Nótese como el eje interaural pasa por el centro del círculo y la punta de la nariz está alineada horizontalmente con las cavidades auditivas como en el SCRC (Fig. 1.1), tal alineamiento se realiza con ayuda de punteros láser colocados en la estructura circular.

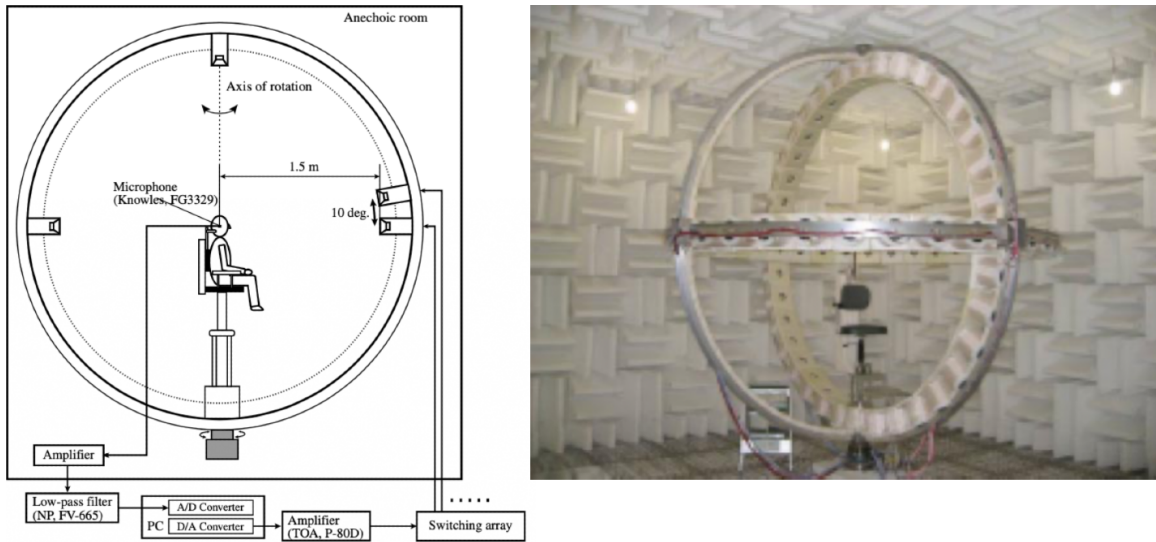


Figura 3.12: Escenario de la medición directa de HRTFs en [19]. Adaptado de [19, Fig. 1].

En este caso, el conjunto de puntos desde donde se emiten los impulsos $\mathfrak{P}$ es

$$\mathfrak{P} = \{(1.5, \theta, \phi) \in \mathbb{R} \mid \theta \in \mathbf{A}, \phi \in \mathbf{E}\}, \quad (3.20)$$

donde $\mathbf{A} := \left\{ \frac{k\pi}{36} \in \mathbb{R} \mid 0 \leq k \leq 71, k \in \mathbb{N} \right\}$ y $\mathbf{E} := \left\{ \frac{k\pi}{18} \in \mathbb{R} \mid -3 \leq k \leq 8, k \in \mathbb{Z} \right\}$. Esto corresponde a una partición regular de 5° para el círculo en el plano XY y una partición de 10° para el plano YZ , en este último considerando únicamente los grados $-30^\circ =$

$-\frac{3\pi}{18}, -20^\circ, -10^\circ, 0^\circ, 10^\circ, \dots, 80^\circ$ ¹⁵. De esta forma, la base de datos contiene (sin contar la dirección $\theta = 0, \phi = 90^\circ$) $(|A||E|)_{105} = 90720$ HRIRs o HRTFs.

Dado que el HRTF depende únicamente de la interacción física del sonido con la anatomía del cuerpo, también es posible (a expensas de obtener HRTFs no personalizadas) utilizar maniqués (cabezas artificiales), diseñadas para investigación acústica (Fig. 3.13 a), que dan lugar a HRTFs “genéricas”. Este último método fue seguido en [29].

No existe una convención para la forma de elegir el conjunto en (3.20) (especialmente los ángulos de acimut y elevación). En un artículo muy reciente [26], You Zhang y colegas adhieren esta problemática y buscan subsanarla con ayuda de redes neuronales, unificando diez bases de datos de HRTFs (entre ellas está la de Watanabe y colegas), que poseen distintas maneras de tomar el conjunto $\mathfrak{P}$ (Fig. 3.13 b). En relación al trabajo en [26], un intento por llegar a una convención para un formato estándar para filtros acústicos espaciales, es la llamada “convención SOFA” (*Spatially Oriented Format for Acoustics*), los detalles se pueden consultar en el enlace: sofaconventions.org.

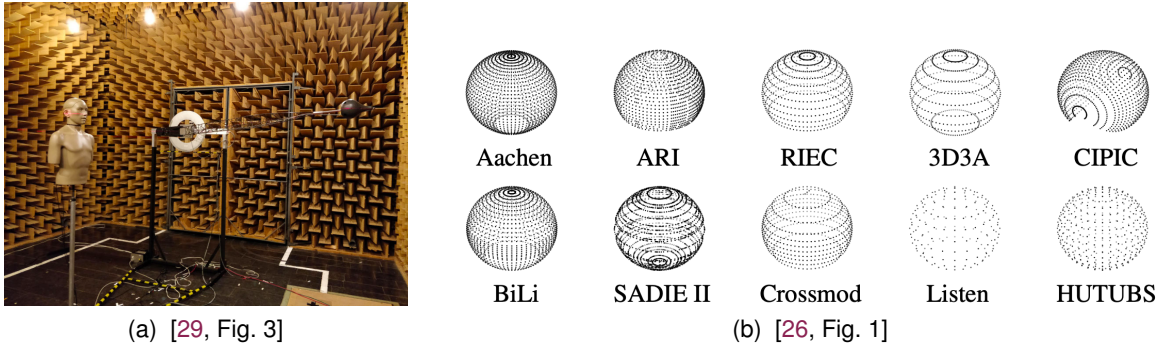


Figura 3.13: (a) Medición de HRTFs con un maniquí KEMAR (*Knowles Electronics Acoustic Research Mannequin*). (b) Distintas formas de tomar los puntos de referencia para las HRIRs de distintas bases de datos de HRTFs. “RIEC” corresponde al conjunto $\mathfrak{P}$ en (3.20), de la biblioteca en [19].

3.4. Observaciones finales

En este capítulo se buscó justificar como la teoría de los sistemas LIT es aplicable al sonido y en particular en la captura de HRTFs. Para la comprensión, obtención e implementación de estos filtros intervienen distintas disciplinas, en este caso el enfoque fue puramente teórico, a continuación se mencionan brevemente otros enfoques importantes con bibliografía sugerente.

Otros enfoques

DSP. Desde el punto de vista práctico del procesamiento digital de señales, el interés está en cómo lidiar con una base de datos de HRTFs (auralización, ver §1.1.2), y su correcta implementación tanto en línea como fuera de línea (dependiendo del objetivo deseado). Si se está tomando en cuenta el movimiento de la fuente sonora, ¿cómo realizar

¹⁵Esta configuración es similar a la usada en [21] (mencionada en §1.1.2), de hecho, Watanabe y colegas mencionan basarse en tal configuración.

el cambio entre las convoluciones de las RIs? (o su equivalente en el dominio frecuencia) de modo que la trayectoria deseada coincida con las RIs respectivas. Esto se aborda en [28, 42, 98, 99]. Aunado a lo anterior, se tiene el problema de interpolación: inferir un HRTF intermedia entre dos puntos de captura, (por ejemplo, un HRTF situado entre dos puntos inmediatos $x, y \in \mathfrak{P}$ en (3.20)), problemática que se aborda en [98, Cap. 6] y [49, 100–103]. En esta misma línea de investigación, es pertinente señalar la tesis doctoral “*A Model of Head-Related Transfer Functions based on a State-Space Analysis*” [104] de Norman Adams, donde se aplican conceptos de teoría del control al manejo de una base de datos de HRTFs para la implementación de un espacio virtual auditivo (o acústico).

Enfoque técnico. En este enfoque se hace énfasis en las herramientas necesarias para capturar las RIs y su correcto uso: la posición específica de los micrófonos en el canal auditivo, tener en consideración las funciones de transferencia del equipo de audio usado (micrófonos y altavoces que emiten el la señal de prueba o impulso), la conversión realizada por el ADC y el DAC en el proceso de captura, etc. También se buscan métodos para agilizar el proceso de captura. En [105], Song Li y Jürgen Peissig hacen una revisión y síntesis de los factores técnicos (y también teóricos) a tener en cuenta para la captura de HRTFs. Los artículos [19, 97] también aborda detalles técnicos importantes a tener en cuenta.

Modelado físico. Dado que aún no se tiene un método efectivo para personalizar HRTFs, se han hecho distintos esfuerzos para personalizar HRTFs, (brevemente clasificados en §1.1.2 con base en el trabajo de Torres [18]). Desde el punto de vista físico

...es posible especificar la presión en el tímpano para una fuente desde cualquier ubicación simplemente resolviendo la ecuación de onda con condiciones de frontera apropiadas para el torso, la cabeza y la oreja. No hace falta decir que esto es un problema analíticamente y computacionalmente intratable [7, p. 199].

Para lidiar con esta “intratabilidad” se recurre a los métodos de simulación numérica denominados “BEM” (*boundary element method*) y “FEM” (*finite element method*), los cuales son efectivos para personalizar HRTFs, pero tienen costo computacional muy alto [106, Sec. 11.2.3]. En [18, Sec. 2.5] se mencionan distintos trabajos dedicados a este enfoque (hasta 2014). [107] es un trabajo más reciente dedicado a esta perspectiva. El software de código abierto *MESH2HRTF* lanzado en 2015, sintetiza HRTFs utilizando el método BEM (detalles en mesh2hrtf.org).

¿Qué sigue?

Un tema que no se abordó en este capítulo, fue el papel de las HRTFs en la investigación de la habilidad de audición espacial, pues en ellas están capturadas (codificadas) todas las pistas de la localización. Este tema se dejó de lado a propósito para enfatizar la siguiente observación: las HRTFs cumplen exitosamente con reproducir los estímulos asociados a la localización y prescinden por completo de un conocimiento acerca del funcionamiento del sentido del oído y las pistas que el sistema auditivo toma en cuenta para la localización y la audición espacial¹⁶. En contraste, es válido preguntarse ¿cuáles son

¹⁶En cierto modo, esta es la “mágia” de la teoría de sistemas LIT, pues no es necesario saber el funcionamiento y conducta interna de la caja negra, siempre se puede imitar el comportamiento mediante la respuesta

y como operan las pistas de la localización?, ¿qué información contiene el HRTF, como para que el oído las interprete como el escenario real y reproduzca los estímulos de la localización?, ¿qué se debe tener en cuenta si se desea modelar un HRTF “desde cero”? (tema que se abordará en el último capítulo). Para contestar estas últimas preguntas, es necesario adentrarse en el proceso de audición, especialmente en el comportamiento y modo de operación de tales pistas.

al impulso y la convolución (en el dominio tiempo), o la función de transferencia y el producto puntual (en el dominio frecuencia).

Capítulo 4

Perspectiva general de los primeros tres sectores del sistema auditivo y una introducción a las imágenes auditivas de R. Lyon



CTUALMENTE se tienen identificados muchos aspectos importantes sobre el proceso fisiológico de la audición humana, sin embargo, aún existe demasiado por descubrir, especialmente a nivel del oído interno y el sistema nervioso central auditivo (SNCA). El sistema auditivo humano se puede dividir en cuatro sectores: oído externo, oído medio, oído interno y el SNCA.

Este capítulo busca exponer (a grandes rasgos) el proceso de audición humana en los primeros tres sectores del sistema auditivo con énfasis las posibles transformaciones y transducciones que puede sufrir el sonido a lo largo del proceso. Esto con dos objetivos: 1. dar una breve introducción al concepto de “imagen auditiva” de Richard Lyon, donde se aplica la teoría de sistemas LIT al proceso fisiológico de la audición y 2. preparar el terreno para los temas que se abordarán en el siguiente capítulo: las señales que el SNCA toma en cuenta para realizar la localización así como su justificación fisiológica.

Partes del sistema auditivo

El primer sector se compone de la oreja (o pabellón auditivo) y el conducto auditivo externo. El tímpano se considera parte del segundo sector y es una membrana que se adhiere a un pequeño hueso llamado martillo, este a su vez se adhiere al yunque y este último se adhiere al estribo. La base del estribo está en contacto directo con la cóclea (a través de la ventana oval). Los tres pequeños huesos se denominan huesecillos del oído. En el oído medio también se encuentra una cavidad que conecta con el área nasofaringea, denominada trompa de Eustaquio. La cóclea es el elemento principal del tercer sector, se trata de un hueso con forma de caracol que está lleno de dos líquidos: perilinfa y endolinfa. Los conductos semicirculares son tres conductos delgados en forma de arco y forman parte de la cóclea. La cóclea se comunica con las fibras nerviosas auditivas (también se denominan nervios acústicos o nervios vestibulococleares) y estas últimas se comunican a su vez al SNCA a través del 8^{vo} par craneal. El SNCA es el cuarto y último sector del sistema auditivo y corresponde a partes específicas del tronco encefálico y el cerebro.

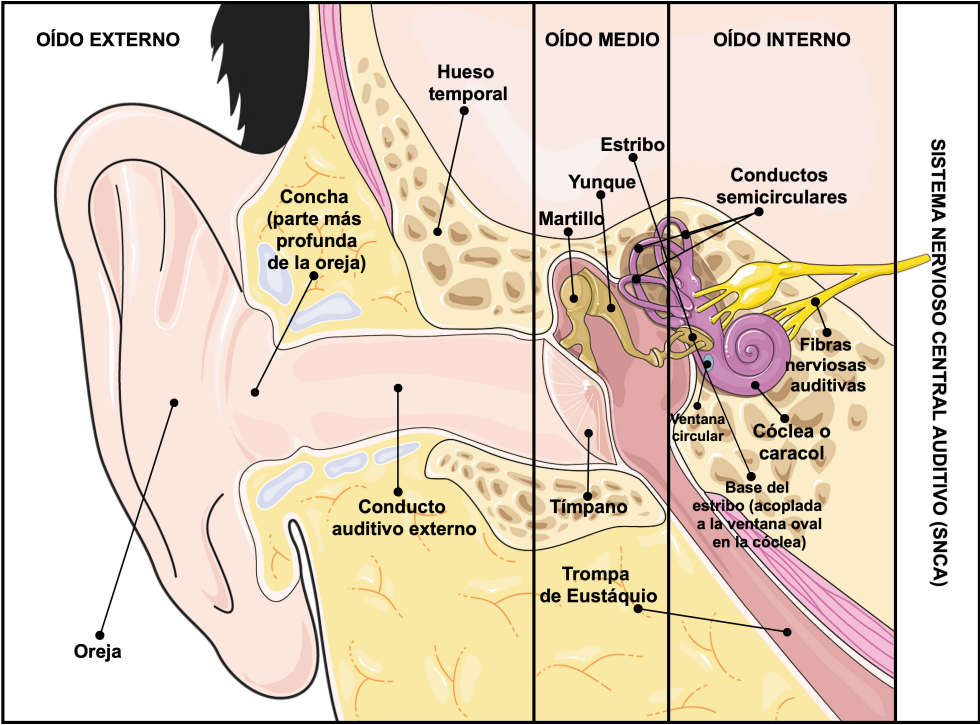


Figura 4.1: Los cuatro sectores del sistema auditivo. Edición sobre imagen médica de *Servier Medical Art*.

En la Tabla 4.1, Yost caracteriza cada uno de los sectores antes mencionados por su modo de operación y la función que cumplen. Esta tabla condensa aspectos fundamentales del proceso de audición y servirá como apoyo y constante referente durante este primer apartado dedicado a los primeros tres sectores del oído.

	Sector I: oído externo	Sector II: oído medio	Sector III: oído interno	Sector IV: SNCA
Partes principales	• Oreja • Conducto auditivo externo	• Tímpano • Huesecillos del oído • Trompa de Eustaquio	• Cóclea • Fibras nerviosas auditivas	Partes específicas del cerebro
Modo de operación	Vibraciones de aire	Vibraciones mecánicas	• Mecánica • Hidrodinámica • Electroquímica	Electroquímica
Función	• Protección • Amplificación • Localización	• Igualación de presión • Coincidencia de impedancia • Estimulación selectiva de la ventana oval	• Filtrado de distribución • Transducción	Procesamiento de información

Tabla 4.1: Caracterización de Yost de los cuatro sectores del sistema auditivo y las partes principales que lo componen. Tabla adaptada de [57, Fig. 6.1].

De la fuente sonora al sonido incidente en la oreja

Considérese una onda sonora $f^P \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ emitida desde un punto $P(\theta, \phi, \rho)$ del SCRC. f^P se registra en un punto inmediato a la posición de la fuente que lo produce. Dependiendo del ambiente, por lo mencionado en el capítulo anterior (ver (3.10)), la primer transformación que sufre el sonido desde el punto de emisión a un punto inmediato en la oreja corresponde al comportamiento Λ_L^P para el oído izquierdo, y Λ_R^P para el derecho con funciones de salida $\bar{\lambda}_L^P$ y $\bar{\lambda}_R^P$ respectivamente, por tanto, la primer transformación que se toma en cuenta es

$$\bar{\lambda}_0 : \mathcal{C}_c(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}_c(\mathbb{R}) \times \mathcal{C}_c(\mathbb{R}), \quad \bar{\lambda}_0(f^P) = (\bar{\lambda}_L^P, \bar{\lambda}_R^P). \quad (4.1)$$

correspondiente a las funciones de salida de los comportamientos Λ_L^P y Λ_R^P conectados en paralelo. Como referencia, $\bar{\lambda}_0$ es el escenario real que se plantea en la Figura 3.11, y se toma en cuenta como punto de partida para el proceso de audición.

4.1. Oído externo y medio

El proceso de audición comienza con la incidencia de $\bar{\lambda}_L^P$ en la oreja izquierda o $\bar{\lambda}_R^P$ en la derecha. S.p.g. sea $f_1(t) := \bar{\lambda}_R^P(t)$. La oreja junto con el canal auditivo externo forman un sistema complejo de resonancias y anti-resonancias que generan alteraciones en forma de crestas y valles del espectro de Fourier de f_1 , y en función de la dirección de procedencia de la onda [6, Sec. 2.2]. Tales alteraciones que amplifican y reducen determinados rangos de frecuencias crean patrones que el SNCA es capaz de reconocer y asociar con una determinada dirección, dando lugar al reconocimiento de pistas monaurales o espectrales [1], por esta razón Yost (Tabla 4.1) menciona que una de las funciones del oído externo es la de localización. Las pistas monaurales se explicarán con mayor atención más adelante cuando se trate el tema de la localización.

Con lo dicho hasta ahora, se considera la transformación

$$\bar{\lambda}_1 : \mathcal{C}_c(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}_c(\mathbb{R}) \quad (4.2)$$

donde $\bar{\lambda}_1(f_1)(t) =: f_2(t)$ es la onda sonora medida en el canal auditivo externo en un punto inmediato al tímpano después de haber sido transformada por la oreja y el canal auditivo.

El tímpano vibra de forma simpática a la onda sonora $f_2(t)$ y transmite su vibración en cadena por todos los huesecillos del oído hasta la base del estribo, la cual está acoplada directamente a la cóclea a través de la ventana oval. El tímpano realiza la transducción

$$\bar{\lambda}_2 : \mathcal{C}_c(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}_c(\mathbb{R}) \quad (4.3)$$

donde $\bar{\lambda}_2(f_2)(t) =: f_{m3}(t)$ describe la vibración mecánica de un punto determinado del tímpano al tiempo t y en respuesta a la onda sonora f_2 .

La trompa de Eustaquio permite la entrada del aire exterior a la cavidad del oído medio. De esta forma la presión dentro en la cavidad se iguala a la presión atmosférica del exterior y es posible la adaptación a percibir el sonido a distintos niveles de presión atmosférica [57, Cap. 6].

Dos modelos para el tímpano y los huesecillos

En este breve apartado se muestran dos modelos físicos del tímpano y los huesecillos, no se ahondará mucho en los detalles teóricos de cada modelo, el objetivo de abordarlos es justificar la existencia de una transducción de ondas sonoras a vibraciones mecánicas y a su vez la existencia de una amplificación de las ondas sonoras que se generan en la cóclea.

Prensa hidráulica. Yost [57, Cap. 6] argumenta que el funcionamiento del tímpano y los huesecillos es análogo al funcionamiento de una prensa hidráulica, pues existe una diferencia considerable entre el área efectiva del tímpano que registra movimiento ante un sonido incidente ($\approx 55 \text{ mm}^2$) y el área de la base del estribo ($\approx 3.2 \text{ mm}^2$). Haciendo referencia a la Figura 4.2, debido al principio de Pascal¹ debe ocurrir que la presión $P_1 = \frac{F_1}{A_1}$ sea igual en cualquier punto del contenedor, en particular para el punto inmediato al tapón pequeño se tiene que $P_2 = P_1$, así $\frac{F_2}{A_2} = \frac{F_1}{A_1}$ y $F_2 = \frac{A_2 F_1}{A_1}$. Por lo tanto, si el tímpano es empujado con una fuerza F_1 , se tiene que la fuerza final en la base del estribo es $F_2 = \frac{55 F_1}{3.2} \approx 17 F_1$. Aunado a lo anterior, los huesecillos martillo y yunque actúan como un sistema de palancas, de 1.3 a 1 y la fuerza del martillo aplicada al yunque hace que este último haga un efecto de pandeo el cual “provoca una multiplicación adicional por 2” [57, p. 74]. Con base en lo anterior, Yost argumenta que la presión p_1 aplicada por el tímpano a la cadena de vibraciones del oído medio, puede escalar a la presión $p_2 = (17)(1.3)(2)p_1 = (44.2)p_1$. Con este modelo, la presión recibida en la cóclea puede llegar a ser hasta 44 veces mayor que recibida por el tímpano, lo que corresponde a un incremento de $20 \log_{10}(44) = 32.8690... \text{ dB}$.

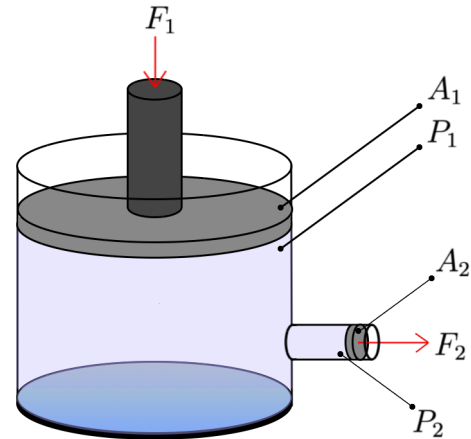


Figura 4.2: Prensa hidráulica. Contenedor con dos aberturas y dos tapas móviles que sellan las aberturas.

Pistón. El segundo modelo para el tímpano y los huesecillos del oído es considerar el sistema como un pistón sin masa ni fricción, en la Figura 4.3 se muestra el planteamiento de Puria y Steele [108].

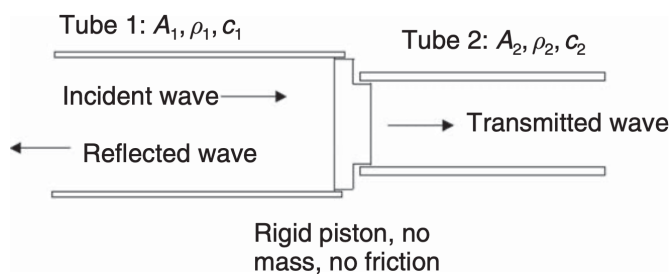


Figura 4.3: Modelo simplificado del sistema del tímpano y los huesecillos [108, Fig. 1].

¹El principio de Pascal para fluidos asegura que la presión aplicada a un fluido en un contenedor cerrado es la igual en todos sus puntos.

El conducto auditivo exterior se considera como un tubo 1 que tiene área transversal A_1 , densidad ρ_1 y velocidad del sonido c_1 , el pistón conecta con el tubo 2 con área transversal A_2 (que representa la ventana oval que conecta con la cóclea), densidad ρ_2 y velocidad del sonido c_2 .

Un tono puro $f_{in}(t) = B_i \sin(2\pi\phi_0 t)$ incidente de forma perpendicular al pistón, dará lugar a $f_{tr}(t) = B_t \sin(2\pi\phi_0 t)$ (onda transmitida al tubo 2) y $f_{ref}(t) = B_r \sin(2\pi\phi_0 t)$ (onda reflejada por el pistón al tubo 1). Siguiendo la teoría en [85, Cap. 5], el “coeficiente de transmisión” T de la propagación de la onda en el pistón, es el valor $T = \frac{\sigma_{tr}(0, t)}{\sigma_{in}(0, t)}$ [85, p. 223],

donde se cumple que $\sigma(x, t) = \rho c \frac{\partial f(x, t)}{\partial t}$ [85, p. 210], y donde $f(x, t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ es una onda sonora en propagación. En este caso, se consideran $f_{in}(t)$, $f_{tr}(t)$ y $f_{ref}(t)$ en un punto fijo $x = 0$ (en el pistón), por lo que la función $f_{in}(t)$ es equivalente a la función $f_{in}(0, t)$ con $f_{in}(x, t) = B_i \sin(\gamma x + 2\pi\phi_0 t)$ para algún $\gamma \in \mathbb{R}_{>0}$ (lo mismo para $f_{tr}(t)$ y $f_{ref}(t)$). Con lo anterior, se tiene que

$$T = \frac{\sigma_{tr}(0, t)}{\sigma_{in}(0, t)} = \frac{\rho_2 c_2 \frac{\partial (B_t \sin(2\pi\phi_0 t))}{\partial t}}{\rho_1 c_1 \frac{\partial (B_i \sin(2\pi\phi_0 t))}{\partial t}} = \frac{\rho_2 c_2 B_r 2\pi f_0 \cos(2\pi\phi_0 t)}{\rho_1 c_1 B_i 2\pi f_0 \cos(2\pi\phi_0 t)} = \frac{z_2 B_r}{z_1 B_i}, \quad (4.4)$$

donde $z_1 = \rho_1 c_1$ y $z_2 = \rho_2 c_2$ son las *impedancias acústicas específicas* de cada fluido (mencionadas antes en §3.1.2). Siguiendo la teoría en [85], para encontrar la razón $\frac{B_r}{B_i}$, se parte de dos suposiciones: 1. la presión incidente en el pistón y la presión reflejada es igual a la presión transmitida

$$B_i + B_r = B_t, \quad (4.5)$$

y 2. las fuerza del tubo 1 debe ser la misma del tubo 2

$$A_1 B_i z_1 - A_1 B_r z_1 = F_{tubo\ 1} = F_{tubo\ 2} = A_2 B_t z_2. \quad (4.6)$$

La fuerza de la onda reflejada es negativa pues va en dirección contraria al pistón. De (4.5) se tiene $B_r = B_t - B_i$, sustituyendo el valor de B_r en (4.6) y desarrollando se llega a que la razón entre amplitud de onda transmitida y onda incidente es

$$\frac{B_t}{B_i} = \frac{2\alpha\beta}{1 + \alpha\beta}. \quad (4.7)$$

con $\alpha = \frac{A_1}{A_2}$ y $\beta = \frac{z_1}{z_2}$. Finalmente de (4.4) y (4.7) se llega a que $\frac{2\alpha}{1 + \alpha\beta} = T$. El modelo de Puria y Steele indica que un tono puro incidente en el tubo 1 provoca un incremento de $20 \log_{10}(T)$ dB en la amplitud del tono transmitido al tubo 2 (cóclea). Tomando² $c_1 = 344$ m/s y $c_2 = 1500$ m/s, $\rho_1 = 1.225$ kg/m³ y $\rho_2 = 1029$ kg/m³, $A_1 = 0.055$ m² y $A_2 = 0.00322$ m² (los valores de áreas de Yost [57, Cap. 6]), se llega a que $T \approx 34$, por lo que el incremento es de $20 \log_{10}(34) = 30.6295...$ dB.

Ambos modelos muestran como el incremento de la presión sonora en la ventana oval oscila los 30 dB. Este incremento es muy conveniente, pues como ya se mencionó, la cóclea está llena de líquido y la generación de ondas sonoras en líquidos requiere más trabajo en comparación con el aire (debido a la impedancia).

²Se toman valores usuales del agua de mar ya que desde un punto de vista puramente acústico, los líquidos que llenan la cóclea (perilinfia y endolinfia) “son esencialmente agua (un poco salada)” [3, p. 52].

4.2. Oído interno

Las vibraciones mecánicas que son recibidas y amplificadas en la base del estribo crean ondas acústicas acuáticas en la ventana oval, esto último da lugar a la transformación

$$\bar{\lambda}_3 : \mathcal{C}_c(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}_c(\mathbb{R}) \quad (4.8)$$

donde $\bar{\lambda}_3(f_{m3})(t) = f_4(t)$ (ver (4.3)) describe la onda sonora (fluctuaciones de la presión, esta vez respecto a la presión hidrostática normal en el líquido perilinfa) medida en la ventana oval después de haber sido amplificadas por el sistema del tímpano y huesecillos, y cuya generación se debe al movimiento de la base del estribo, esta última realiza la transducción del sonido como movimiento oscilatorio al sonido como onda sonora. f_4 se origina en la ventana oval, y se propaga por la espiral de la cóclea, puede recorrer la zona de la rampa vestibular, la rampa timpánica o bien el conducto coclear (ver Figura 4.4).

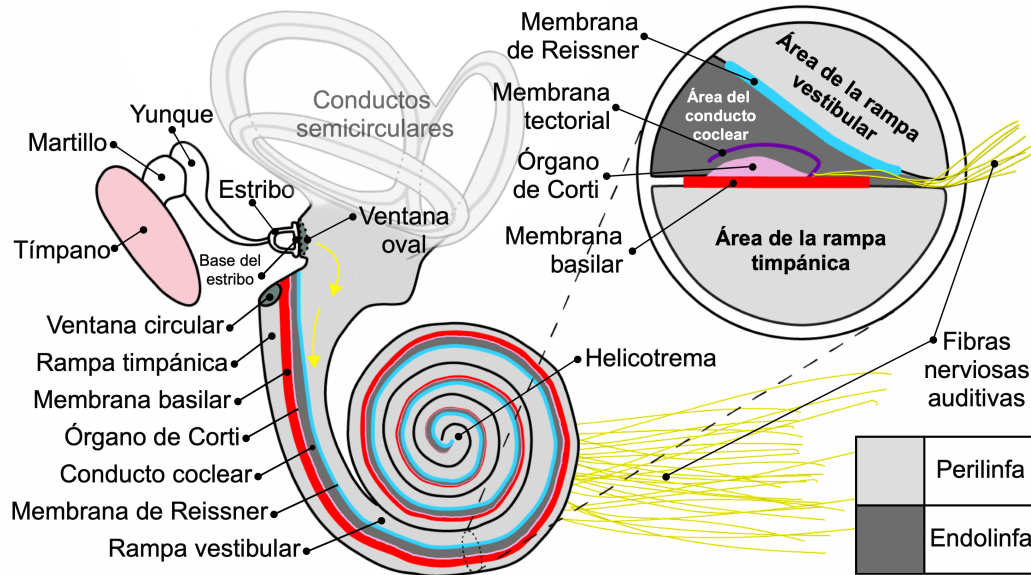


Figura 4.4: Partes significativas de la cóclea para el proceso de audición. Las flechas indican como un sonido emitido en la ventana oval se dirige a la espiral coclear, que tiene tres conductos principales: la rampa vestibular, la rampa timpánica y el conducto coclear. El helicotrema es el punto donde la rampa vestibular se conecta con la rampa timpánica. Se presenta un corte transversal de la espiral coclear para ilustrar que el órgano de Corti está presente a lo largo de toda la espiral y sobre la membrana basilar. Se señala la posición de la membrana tectorial que es uno de los elementos del órgano de Corti. El dibujo de la membrana basilar busca evidenciar su forma particular en vista transversal.

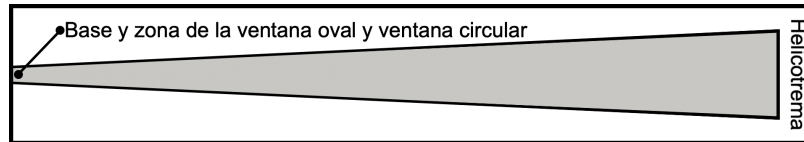
Los conductos semicirculares³ no juegan un papel fundamental en el proceso de audición, su función está asociada a ayudar el sentido del equilibrio mediante la recolección de “información sobre la dirección de la gravedad y las aceleraciones de nuestra cabeza” [3, p. 52].

Los elementos del oído interno que realizan el siguiente proceso de transducción son la membrana basilar y el órgano de Corti. Estos dos requieren de una mayor atención.

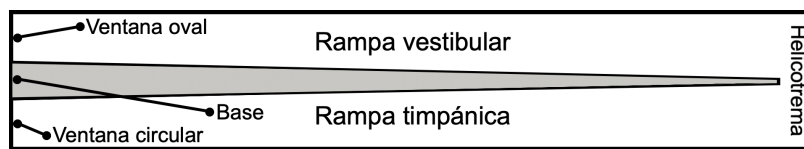
³Que sorprendentemente se asemejan a un sistema de coordenadas tridimensional, pues pareciese que cada uno estuviese ubicado de modo que coinciden con los planos XY , YZ y XZ .

4.2.1. La membrana basilar (MB)

Si la cóclea fuera una novela, sin duda la membrana basilar sería uno de los personajes principales. La base de la MB se adhiere a la pared ósea de la cóclea, se encuentra entre la ventana oval y la ventana circular, está en contacto con la rampa timpánica y es parte del conducto coclear, que recorre toda la espiral de la cóclea. La membrana tiene una longitud media de 35 mm y una forma muy particular.



(a) Forma de la MB en vista superior.



(b) Forma de la MB en vista transversal.

Figura 4.5: MB en vista superior y transversal.

En la Figura 4.5 se representa la membrana y la cóclea como si estuviesen “desenrolladas”, la base es rígida (vista transversalmente) pero angosta (vista superiormente), y gradualmente al llegar al ápice en el helicotrema ocurre lo contrario: es suave y delgada (vista transversalmente) y ancha (vista superiormente). El marco negro que encierra la membrana representa la superficie ósea de la espiral coclear. La MB recibe una atención especial debido a que es la parte de la cóclea que presenta una respuesta mecánica significativa a un sonido que se propaga por la espiral coclear. El conocimiento del movimiento y algunos de los patrones de respuesta de la membrana se debe en gran parte al trabajo de Georg von Békésy. Las ondas sonoras originadas en la ventana oval producen una onda viajera transversal (recordar la Figura 3.1) en la membrana [3, Cap. 2]. La Figura 4.6 ilustra este fenómeno. Aunado al fenómeno de la onda transversal, está el fenómeno de la respuesta de la MB a dos tonos puros, el cual se describe a continuación.

Comportamiento de la MB a un sonido compuesto de dos tonos. Una onda sonora $f(t)$ compuesta de dos tonos puros, es decir, $f(t) = A \sin(2\pi\phi_0 t) + B \sin(2\pi\phi_1 t)$, emitida en la ventana oval (se presupone que los tonos son audibles), causara una onda “viajera” transversal en la MB, dicha onda tendrá la característica de tener dos valores máximos (el desplazamiento vertical de la membrana es máximo) a lo largo de la membrana. En palabras de Yost: “si la cóclea recibe dos frecuencias diferentes simultáneamente, cada una de ellas creará un desplazamiento máximo en diferentes puntos a lo largo de la MB” [57, p. 95], Schnupp y colegas también mencionan este fenómeno: “diferentes frecuencias crearán vibraciones máximas en diferentes puntos a lo largo de la membrana” [3, p. 62]. Haciendo referencia a la Figura 4.6, se considera la posición de la membrana “congelada” en un instante t_0 posterior a la emisión del sonido compuesto de dos tonos puros. Al tiempo t_0 se puede considerar la posición de la membrana como una función continua $f: [0, b_m] \rightarrow \mathbb{R}$. El fenómeno descrito como “un desplazamiento máximo en diferentes puntos a lo largo de la membrana” se ve reflejado en dos puntos máximos $f(x_0)$, $f(x_1)$, es decir se cumple que $f(x_0) \geq f(x)$ y $f(x_1) \geq f(x)$ para todo $x \in [0, b_m] \setminus \{x_0, x_1\}$. b_m es

la longitud de la membrana y el eje x representa la posición de la membrana en reposo.

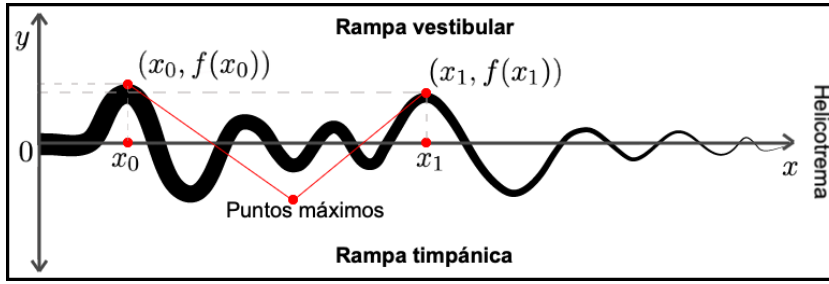


Figura 4.6: Onda transversal en la MB en respuesta a un sonido compuesto por dos tonos puros.

Lo anterior implica que la MB responde mejor a ciertas frecuencias en determinadas posiciones a lo largo de ella, a este fenómeno se le conoce como *tonotopía* de la MB.

La tonotopía de la MB. En la cóclea existen dos fuentes de resistencia mecánica que afectan cualquier sonido que propagado por la rampa vestibular: “una proporcionada por la rigidez de la MB, la otra por la inercia de los fluidos cocleares” [3, p. 56]. La rigidez mencionada se refiere a la vista transversal de la Figura 4.5. Ambas resistencias se encuentran opuestas, pues a medida que la rigidez de la membrana disminuye, la “inercia” de un sonido propagado por el líquido coclear se pierde (conforme se propaga por la rampa vestibular). Lo anterior provoca que un sonido tome una trayectoria “comprometida”, es decir, una trayectoria:

...suficientemente larga como para que la rigidez ya haya disminuido un poco, pero no tanto como para que la resistencia de inercia [*inertial resistance*] ya haya crecido dramáticamente. Y debido a que la resistencia de inercia depende de la frecuencia, el compromiso óptimo, el camino de la resistencia más baja en general, depende de la frecuencia. Es largo para frecuencias bajas, menos afectadas por la inercia, y cada vez más corto para frecuencias más altas [3, p. 57].

De esta forma se le asigna una tonotopía a la MB, es decir “cada punto de la membrana basilar tiene su propia ‘mejor frecuencia’, una frecuencia que hará que este punto de la membrana basilar vibre más que cualquier otro” [3, p. 57]. La base de la membrana tiene preferencias por frecuencias altas y a medida que se avanza por la espiral coclear la frecuencia disminuye hasta llegar al helicotrema. Basándose en diversos estudios y datos empíricos, Greenwood [109] propone la siguiente función

$$T(x) := 165.4(10^{0.06x} - 1), \quad (4.9)$$

la cual busca modelar la tonotopía (frecuencia) $T(x)$ de la MB en función de la distancia x (en milímetros), desde el helicotrema a la base. Para $x = 1$ mm (punto cercano a la punta de la MB en el helicotrema) se tiene la frecuencia $T(1) \approx 24.5\text{Hz}$, y para $x = 35\text{mm}$ (longitud media de la MB humana), se tiene que $T(35) \approx 20,657.2\text{Hz}$, por lo que es un modelo acorde con el rango de frecuencias audibles del oído humano. La Figura 4.7 (a) presenta la distribución de las frecuencias a lo largo de la membrana. Se presenta la vista superior de la membrana (Figura 4.5 (a)), y la escala de grises indica el nivel de rigidez de la membrana en esa posición. La Figura 4.7 (b) muestra las distintas distribuciones la función de Greenwood gráficamente en la membrana. Los números fuera de la espiral son las frecuencias asociadas y los números marcados de manera regular son la distancia

desde el ápice en mm. Lyon añade 88 círculos dispuestos a lo largo de la membrana, que corresponden a las frecuencias de las notas musicales de la escala temperada desde $A_0 = 27.5$ Hz hasta $C_8 = 4,186$ Hz, (las 88 teclas del piano).

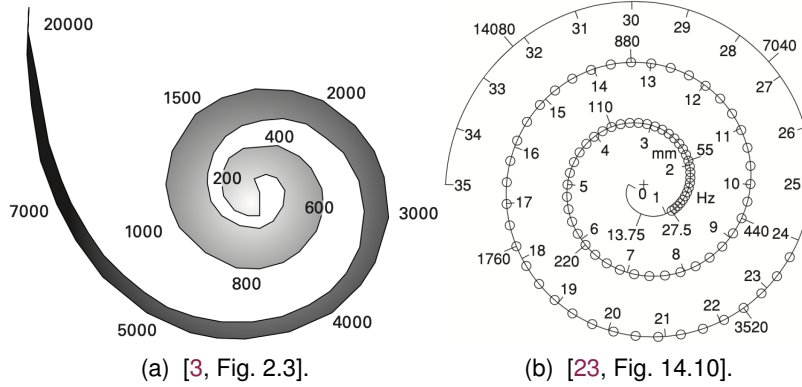


Figura 4.7: Tonotopía de la membrana basilar.

Apoyándose en los fenómenos de la tonotopía y los puntos máximos en respuesta a dos tonos, Yost menciona (Tabla 4.1), que una de las funciones principales del oído interno es el filtrado de distribución, es decir, un sonido se “descompone” y se distribuye en la MB tomando una nueva representación: ondas transversales en la membrana que tienen puntos máximos asociados por la tonotopía. Aunque lo anterior esté comprobado, “tratar de deducir el tono de un sonido desde donde las amplitudes de vibración de la membrana basilar son máximas es a menudo imposible” [3, p. 62], por lo que aún están en debate e investigación por la comunidad científica los detalles de la relación entre ondas sonoras recibidas en la ventana oval y el movimiento en la MB que estas provocan. “No tenemos una imagen muy detallada de cómo responde realmente la membrana basilar a los sonidos complejos en varios niveles de sonido” [3, p. 72]. “La comprensión actual de cómo surgen las propiedades del movimiento de la membrana basilar es incompleta” [110, p. 440]. Al margen de esto último, se sabe que la MB: (1) responde mejor (mediante ondas transversales) a ciertas frecuencias en determinados puntos a lo largo de ella (tonotopía) y por ende “actúa como un banco de filtros mecánico que separa los diferentes componentes de frecuencia del sonido entrante [en la ventana oval]” [3, p. 64], y (2) es el elemento del oído interno que realiza la transducción de ondas sonoras acuáticas en movimiento mecánico, este movimiento ya no se trata de una oscilación (como en el caso del tímpano o los huesecillos del oído medio), ahora es un movimiento que consiste en ondas transversales en ella.

Con base en lo mencionado hasta ahora, se tiene que la onda sonora f_4 originada en la ventana oval y proveniente de la transformación $\bar{\lambda}_3$ en (4.8), es transformada por la MB en una función que modela la posición de la membrana al tiempo t , es decir, se considera la siguiente transformación⁴

$$\bar{\lambda}_4 : \mathcal{C}_c(\mathbb{R}) \rightarrow C_c^0(\mathbb{R}_{>0} \times [0, b_m]) \quad (4.10)$$

donde $\bar{\lambda}_4(f_4)(t) =: f_{MB}(t, x)$ es la función que describe la posición de la MB al tiempo t (b_m es la longitud de la MB). La función f en la Figura 4.6 es la función $f_{MB}(t_0, x)$ para t_0

⁴Las transformaciones que se proponen a partir de ahora (concretamente en (4.10), (4.11) y (4.12)), son (en esencia) las que propone Licklider en su artículo *A duplex theory of pitch perception* [111], el cual se abordará más adelante.

fijo. $C_c^0(\mathbb{R}_{>0} \times [0, b_m])$ es el conjunto de funciones continuas (con la norma uniforme) de $\mathbb{R}_{>0} \times [0, b_m]$ en $\mathbb{R}$.

Se asume que el movimiento de la membrana basilar capturado en la función $f_{MB}(t, x)$ codifica toda la información que se envía desde la ventana oval, y es el responsable de activar el órgano de Corti para seguir con el proceso de audición.

4.2.2. El órgano de Corti

Adherido a lo largo de la MB se encuentra el órgano de Corti cuya función es la transducción del sonido codificado por el movimiento de la MB en señales electroquímicas. Visto transversalmente (como se presenta en la Figuras 4.8 y en la ampliación de la Figura 4.4) el órgano posee de tres a cuatro hileras de células ciliadas exteriores y una hilera de células ciliadas interiores, llamadas así porque poseen pequeños pelos en sus extremos que se denominan estereocilios (EC), la altura de los EC varía de forma gradual (ver ampliación de la Figura 4.8). En la punta, cada EC está unido por una estructura proteínica denominada *tip link*. En contacto cercano con los EC está la membrana tectorial.

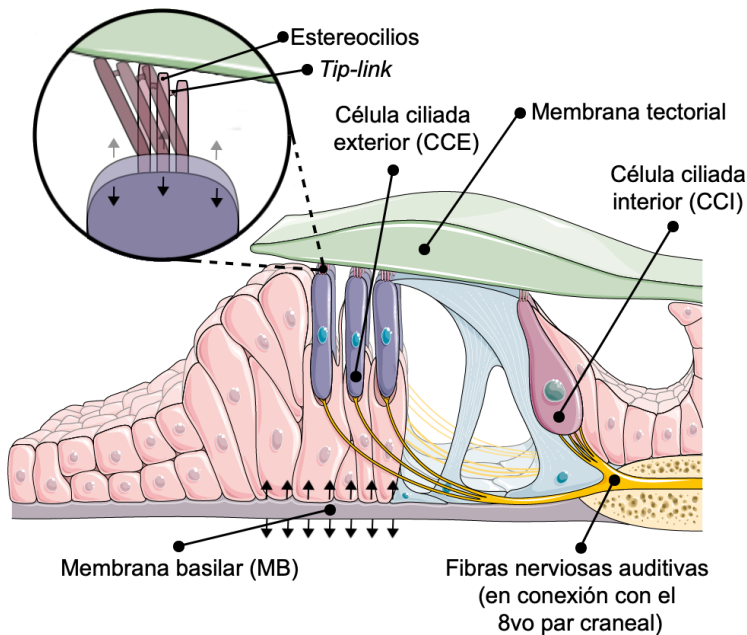


Figura 4.8: Corte transversal del órgano de Corti. La MB se encuentra en la base. Se presenta una ampliación de la punta superior de una célula ciliada exterior. Las flechas buscan ilustrar como los estereocilios (cuyo tamaño es gradual) se desvían de su posición normal debido al empuje de la MB. Edición sobre imagen médica de *Servier Medical Art*.

Cuando la MB se mueve, los EC son empujados contra la membrana tectorial provocando que se inclinen o desvíen de su posición en reposo, lo que produce una tensión en la estructura *tip link*. La tensión en la *tip link* causa la apertura de canales de iones que permiten la entrada de iones de potasio positivos (K^+)⁵ a los EC. La ampliación que se muestra en la Figura 4.8 busca ilustrar este fenómeno, las flechas en las células ciliadas exteriores representan su movimiento en respuesta a la vibración de la MB (también señalada con flechas) y se representa la desviación de los EC. Un mayor estiramiento de la *tip link* significa la apertura de más canales de iones. La apertura de los canales permite

⁵La endolinfa que llena el conducto coclear tiene una alta concentración de iones de potasio positivos, esto es lo que hace que se diferencie de la perilinfa. La alta concentración de K^+ se debe a la stria vascularis, una estructura en el conducto coclear que está secretando constantemente dicho ion. El conducto coclear sano tiene un potencial de 80 mV [3, Cap. 2].

la entrada de una corriente despolarizante hacia el interior de la célula ciliada, además:

...debido a que la corriente de K^+ permitida en la celda es proporcional al número de canales abiertos, el patrón de vibración mecánica se traduce así en un patrón análogo de corriente despolarizante. Cuanto mayor sea la desviación de los estereocilios, mayor será la corriente. (...) Por lo tanto, esperamos que la diferencia de voltaje a través de la membrana de la célula ciliada aumente y disminuya periódicamente en sincronía con la vibración de la membrana basilar [3, p. 67].

De este modo, para un punto fijo a lo largo de la MB, hay una relación directa entre el desplazamiento vertical de la MB y la cantidad de corriente que genera la célula ciliada, esto ocurre para ambos tipos de células ciliadas, sin embargo hay diferencias significativas entre ambas.

CCIs

Un experimento [112] (mencionado también en [3, Cap. 2]), que consistió en medir los cambios de voltaje de una CCI de un cuyo, encontró que para tonos bajos, la CCI presenta un patrón sinusoidal de corriente alterna (CA) y a medida que incrementa la frecuencia se comienza suprimir la componente de CA y comienza a aparecer una componente de corriente directa (CD) cada vez más significativa. La Figura 4.9 registra el resultado del experimento en cuestión. Se muestran los cambios del voltaje en una CCI en respuesta a un tono puro (marcado en hercios a la derecha de cada señal) a un volumen de 80 dB SPL y en un intervalo de tiempo 70 ms. A los 2000 Hz se comienza a apreciar una componente significativa de CD y a medida que sube la frecuencia la componente de CA desaparece gradualmente para ser reemplazada por completo por la componente de CD. El experimento sugiere que en la cóclea humana ocurre un fenómeno similar, a saber, para frecuencias bajas, los voltajes de las CCIs responden con una corriente alterna que es análoga al movimiento de la MB (y a su vez al tono puro al que responde dicha membrana), pero a medida que la frecuencia aumenta, al voltaje de las CCIs se va añadiendo un componente de DC que “se despolariza al aumentar el nivel de sonido, pero no sigue los ciclos individuales de la forma de onda del estímulo” [3, p. 82]. Por último, es importante mencionar que las CCIs también realizan una tarea de compresión, es decir, si el movimiento en un punto de la MB tiene mucha amplitud, la CCI correspondiente a ese punto no excederá un umbral de intensidad [23, Cap. 1].

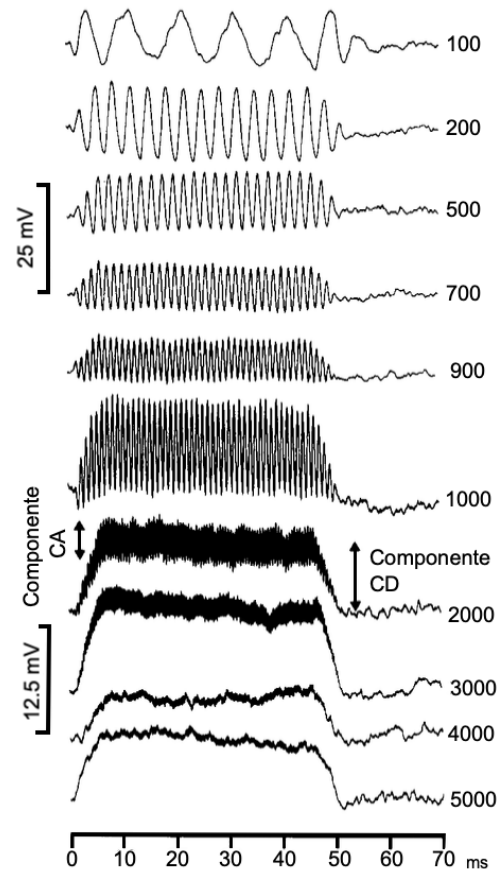


Figura 4.9: Resultados del experimento de Palmer y Russell. Adaptado de [112, Fig. 9].

CCEs

Una diferencia importante entre las CCEs y las CCI es que los estereocilios de los CCEs vibran con las ondas de la MB⁶, de este modo las CCEs presentan dos respuestas a las ondas en la MB: un movimiento de desviación (que comparten con las CCI) y un movimiento oscilatorio perpendicular a la superficie de la membrana tectorial (que no poseen las CCI). Las CCEs siempre están en contacto directo con la membrana tectorial y una de sus funciones más importantes es amplificar un sonido recibido. El proceso de amplificación de las CCEs ocurre mediante un ciclo de retroalimentación donde la onda en la MB hace que los EC de las CCEs vibren, provocando que la MB se mueva nuevamente, lo que causa que esta vuelva a empujar los EC. Este bucle de retroalimentación es “capaz de agregar cantidades bastante sustanciales de energía mecánica a vibraciones muy débiles de la membrana basilar” [3, p. 70], sin embargo este proceso de amplificación aún no se comprende del todo: “¿qué, por ejemplo, impide que este ciclo de retroalimentación mecánica se salga de control?” [3, p. 70]. Este mecanismo de amplificación tiene preferencia por sonidos de baja intensidad, es decir, los sonidos débiles reciben una mayor amplificación en comparación con los sonidos fuertes, a este fenómeno se le denomina no linealidad compresiva (*compressive nonlinearity*).

La amplificación que proveen las CCEs juega un papel fundamental en el proceso de audición, pues un daño en estas células implica un grado significativo de discapacidad auditiva [3, Sec. 2.3]. En el apartado dedicado a la membrana basilar se mencionó que aún no se comprende por completo la respuesta de la membrana a sonidos complejos a distintas intensidades, esto se debe en parte al ciclo amplificación de las CCEs.

Resumiendo, las CCE amplifican las ondas mecánicas de la MB, mientras que las CCI generan una señal de voltaje que refleja el movimiento de la MB (transducción). Las señales de las CCI son análogas a la oscilación de la MB para frecuencias bajas y a medida que la frecuencia incrementa se añade una componente de CD que opaca cada vez más la componente de CA.

Con base en lo dicho hasta ahora, considérese una partición P_{MB} de la MB (intervalo $[0, b_m] \subseteq \mathbb{R}$), $P_{MB} = \{x_1, \dots, x_n\}$, donde $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b_m$. De esta forma se propone la transformación

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_5 : C_c^0(\mathbb{R}_{>0} \times [0, b_m]) &\rightarrow \mathcal{C}_c(\mathbb{R})^n \\ f_{MB}(t, x) &\mapsto (h_1(f_{MB}(t, x_1)), \dots, h_n(f_{MB}(t, x_n))), \end{aligned} \quad (4.11)$$

$\bar{\lambda}_5(f_{MB}(t, x)) = (h_1(f_{MB}(t, x_1)), \dots, h_n(f_{MB}(t, x_n)))$ es el vector de n entradas donde cada función $h_i(f_{MB})$ modela las fluctuaciones de voltaje respecto al tiempo de una CCI en un punto x_i de la MB. Cada $f(t, x_i)$ corresponde al movimiento de la membrana basilar en un punto fijo x_i y la función $h_i(t)$ añade las modificaciones propias de la CCI: compresión, amplificación, uso de CA para tonos graves con una componente de CD, cada vez más significativa para tonos agudos.

⁶Existe un video de un estereocilio (de un cuyo) aislado y visto en el microscopio “bailando” al ritmo de una canción, el estereocilio recibió la señal análoga a través de una pipeta. El experimento fue realizado por Jonathan Ashmore y colegas. El video puede verse en la página asociada al libro de Schnupp, Nelken y King: auditoryneuroscience.com.

4.2.3. Fibras nerviosas auditivas

El siguiente paso de la transmisión de información sonora es la comunicación de las células ciliadas con las fibras nerviosas auditivas. Las CCI y CCEs se comunican con fibras nerviosas “tipo I” y “tipo II” respectivamente. Respecto de las fibras nerviosas tipo II, Schnupp y colegas mencionan que se sabe muy poco de su función, es difícil acceder a ellas para estudiarlas, además de que “parecen inadecuadas para el propósito de proporcionar el flujo rápido de información detallada requerida para un sentido agudo de la audición” [3, p. 55], así, la atención recae en las fibras tipo I.

Cada CCI se conecta con diez a veinte fibras tipo I, estas fibras están formadas por neuronas tipo I capaces de una rápida transmisión de información, la manera en que las CCI se comunican con las fibras es la siguiente:

Las sinapsis en la pared de la célula ciliada interna detectan cambios en el voltaje de la membrana con canales de calcio activados por voltaje y ajustan la velocidad a la que liberan el glutamato transmisor de acuerdo con el voltaje de la membrana. (...) cuanto mayor es el flujo de corriente, más despolarizado es el voltaje de la membrana y mayor es la liberación de glutamato. (...) Cuanto más vibra una parcela particular de la membrana basilar, mayor es la tasa de activación de las fibras del nervio auditivo que provienen de esta parcela [3, p. 76].

Lo significativo de la cita anterior para esta tesis, es que las CCIs convierten el voltaje en señales compatibles con el sistema nervioso, y además estas señales preservan la información enviada desde la MB. Las señales que maneja el sistema nervioso auditivo son trenes de disparo (también llamados impulsos nerviosos) [3, Sec. 2.4], fenómeno que consiste en una secuencia de impulsos eléctricos, disparos (o “potenciales de acción”), que realiza una neurona determinada y transmite a sus vecinas. Para el caso de las fibras nerviosas auditivas, debe existir información sonora implícita o codificada en cada tren de disparo que genera una CCI. Ruyter [113], menciona que existen al menos dos métodos para codificar un tren de disparo: 1. verificar si el patrón temporal entre disparos es significativo, o 2. considerar el tren como “ruido que se debe promediar para revelar señales significativas” [113, p. 1805]. En este caso ocurre que ambos métodos son significativos, el primero por el fenómeno “*phase locking*” y el segundo porque da lugar a los histograma de tiempo de periestímulo o PSTHs (*peristimulus time histograms*). A continuación se abordan someramente ambos fenómenos.

***Phase locking* o aseguramiento de fase**

Párrafos arriba se argumentó como, en respuesta a frecuencias bajas, una CCI produce una corriente alterna que es similar al tono puro (Fig. 4.9), resulta que la respuesta de una de las fibras asociadas a dicha CCI, es un disparo casi en sincronía con la cresta del tono en cuestión, pero que no ocurre siempre, de modo que se considera un fenómeno aleatorio [3, Cap. 2], la Figura 4.10 busca representar este fenómeno.

De este modo, el fenómeno *phase locking* (que se puede traducir como “aseguramiento de fase”) ocurre cuando una fibra nerviosa se “asegura” a una frecuencia y comienza a disparar en sincronía con la aparición de algunas crestas de un tono puro.

Muy ligado al fenómeno de aseguramiento de fase está el fenómeno “*volley principle*” (que se puede traducir como “principio de torrente”), tal principio supone que las fibras

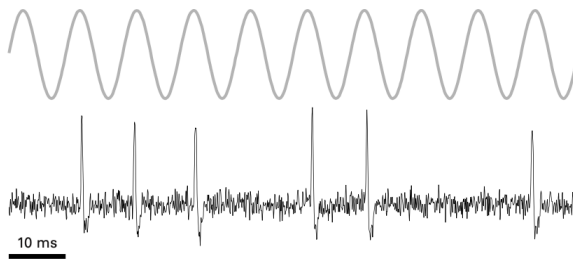


Figura 4.10: Fenómeno de *phase locking*. Simulación del registro del disparo de una fibra nerviosa auditiva en respuesta a un tono de 100 Hz (línea gris). Se observa como cada disparo ocurre cerca de la cresta del tono pero no de manera exacta y no siempre. Figura tomada de [3, Fig. 2.14].

nerviosas asociadas a una CCI (que son de diez a veinte) se complementan entre ellas para llenar información faltante y así tener la información completa de la actividad temporal de cada tono puro.

En otras palabras, “si una fibra nerviosa se salta un ciclo particular de estímulo sonoro, otra fibra nerviosa vecina puede marcarlo con un impulso nervioso” [3, p. 84]. La Figura 4.11, busca ilustrar el principio de torrente junto al fenómeno de aseguramiento de fase. Ambos fenómenos permiten al oído llevar información temporal⁷ a través del conjunto de fibras nerviosas para tonos de hasta 5 kHz para el gato, 9 kHz para el búho y desconocido para el ser humano [54, Cap. 6]. El fenómeno de *phase locking* es importante para tareas auditivas como juzgar el tono o altura (*pitch*) de un sonido complejo (por lo tanto es fundamental para la audición musical) o la tarea de realizar la localización, como se verá más adelante, a través de las pistas de diferencias de tiempo interaurales.

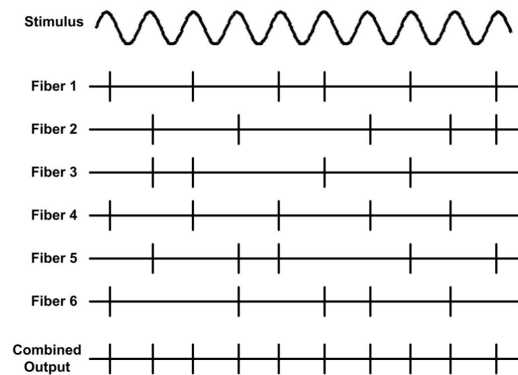


Figura 4.11: *Volley principle* o principio de torrente, las fibras en aseguramiento de fase se complementan entre sí para capturar por completo las crestas de un tono puro. Figura tomada de [114, Fig. 2.4].

PSTH

Los PSTHs son histogramas donde el eje de las abscisa representa la duración de un estímulo determinado, dividida en intervalos de tiempo iguales (bins) y el eje de las ordenadas la probabilidad frecuencial (en disparos por segundo o Hz⁸) de disparo de una neurona para cada bin. Un PSTH proviene de un *raster plot* o *spike raster* que también es una representación bidimensional, donde el eje de las abscisas representa la duración del estímulo y en el eje de las ordenadas se presenta el número de ensayo, donde en cada renglón registra el tren de disparo asociado al estímulo para una neurona fija. La Figura 4.12 presenta un ejemplo de un raster plot con su respectivo PSTH. Se trata de un experimento realizado por Wright y colegas [115] donde se registraron los trenes de disparo de una neurona (localizada en una zona cerebral dedicada a la audición) de un pájaro pinzón cebrado. Cada tren de disparo se registró en respuesta a un estímulo sonoro fijo.

En **A**, se muestra el *Spike raster* de 4 s de duración que registra los trenes de disparo de una neurona del pájaro en respuesta al estímulo sonoro. Se hicieron ochenta ensayos

⁷La información temporal se refiere a tener la capacidad de reconocer el tiempo entre crestas del tono

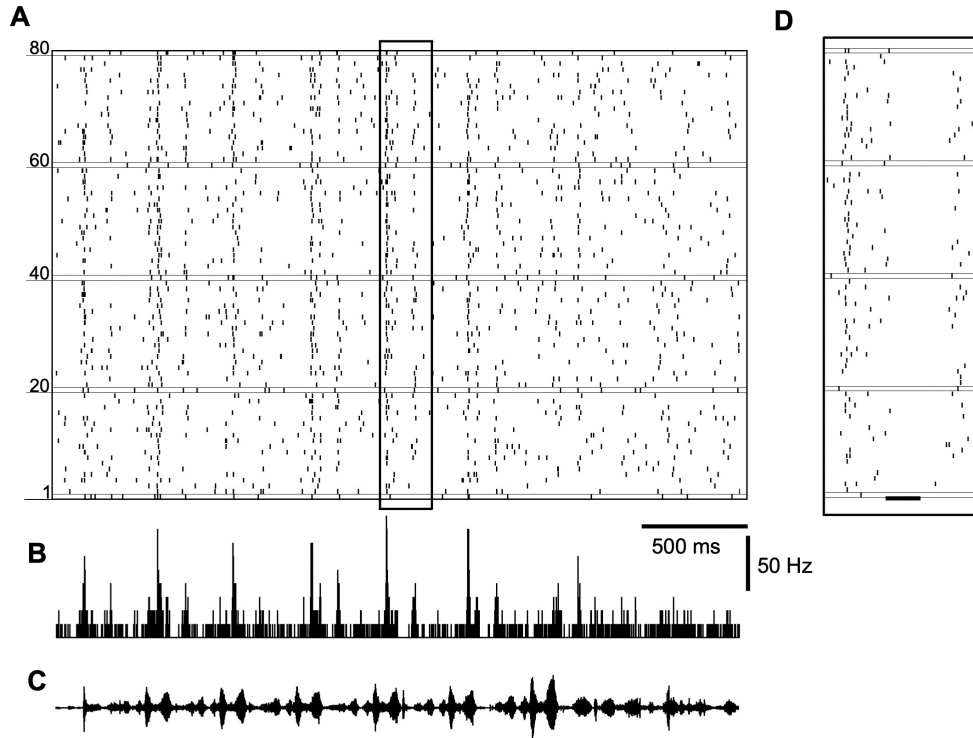


Figura 4.12: Ejemplo de un *spike raster* y su respectivo PSTH. Adaptado de [115, Fig. 1].

(marcados a la izquierda cada 20 lugares en el eje de las ordenadas). **B** corresponde al PSTH asociado al spike raster **A**, el tamaño de los bins fue de 1 ms, se presenta la escala de 50 Hz o 50 disparos por segundo (*spikes / s*). La forma de convertir un *raster* a un PSTH es mediante $\frac{k_i B}{E}$ donde k_i es el número de disparos en el bin i -ésimo (en este caso hay 4000 bins), E el número de ensayos (en este caso $E = 80$) y B el número de bins en un segundo (en este caso $B = 1000$). **C** es la señal análoga (fluctuaciones de voltaje) del estímulo sonoro: pájaros de la misma especie cantando. **D** es una ampliación del segmento que se muestra en el recuadro de **A**. La barra negra en la parte inferior representa un tiempo de 50 ms.

El PSTH es importante por lo siguiente: recordando la tonotopía de la MB (Fig. 4.7), existe evidencia de que las fibras nerviosas preservan esta misma tonotopía, es decir, ante un tono puro $f(t) = A \sin(2\pi\phi_0 t)$, hay mayor actividad neuronal (mayor cantidad de trenes de disparos con frecuencias de disparo significativas en comparación con otras fibras vecinas) en las fibras conectadas a la CCI que se localiza en el punto de la tonotopía de la MB correspondiente a la frecuencia ϕ_0 . Por lo tanto, cada fibra nerviosa auditiva tiene una frecuencia característica, que es la frecuencia que le corresponde en el lugar de la tonotopía de la MB a través de la posición de la CCI a la que se enlaza la fibra en cuestión. De este modo “el patrón de vibración en la membrana basilar se traduce en un código de ‘ritmo-lugar’ neuronal en el nervio auditivo” [3, p. 76].

Ante un sonido percibido, se espera que al 8^{vo} par craneal se le transmita una serie de trenes de disparo correspondientes a cada fibra nerviosa las cuales se pueden ordenar

puro.

⁸No se debe confundir la *frecuencia probabilística* de veces que hubo disparo de una neurona (como es el caso del PSTH), con la *frecuencia de disparo* de una neurona (disparos por segundo), por ejemplo.

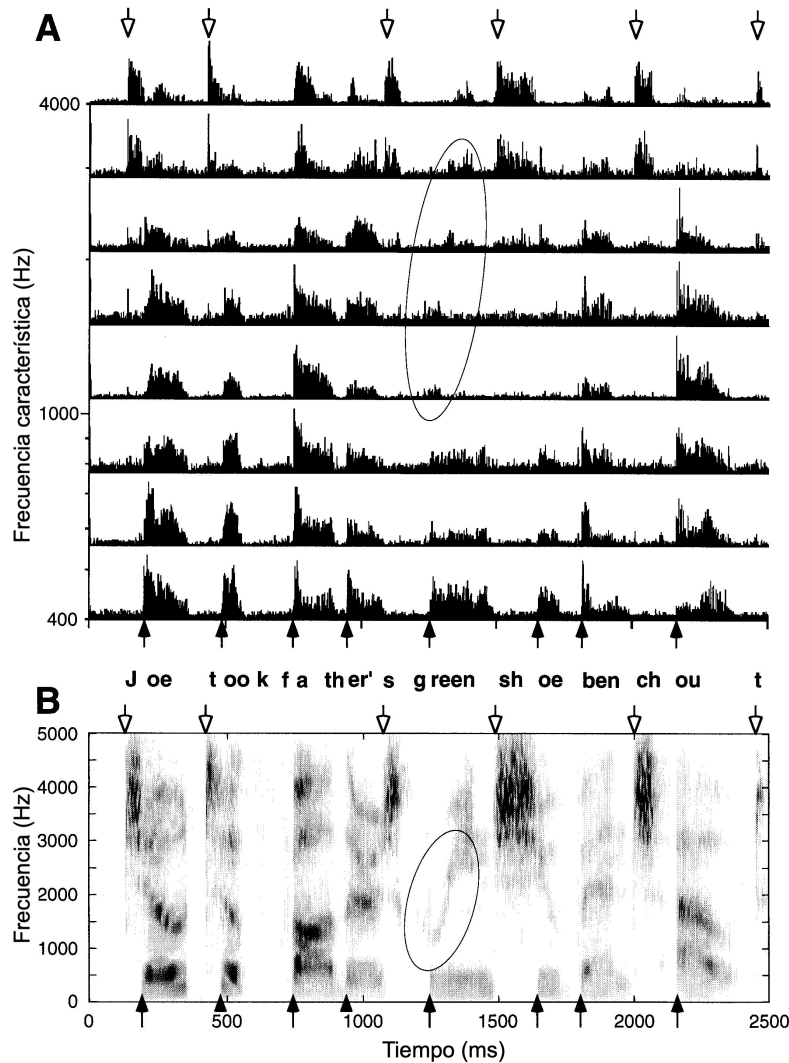


Figura 4.13: Experimento de Delgutte: neurograma vs. espectrograma. **A.** Neurograma de las fibras nerviosas auditivas (con frecuencia característica entre 0.4 kHz y 4 kHz) en respuesta al estímulo sonoro “Joe took father’s green shoe bench out”. **B.** Espectrograma del estímulo, ventana con rango de 0 a 5000 hercios. La voz es tal que las vocales tienen un nivel de 50 dB SPL. Las flechas blancas señalan los *onsets* para frecuencias altas y las flechas negras los *onsets* para frecuencias bajas. Las elipses muestran como el comportamiento dinámico espectral de la palabra *green* se ve reflejado en ambas figuras, en general se observa una clara relación entre ambas. Adaptado de [116, Fig. 16.1].

por frecuencia. Todo lo anterior desemboca en la siguiente afirmación: la representación sonora que el 8^{vo} par craneal le entrega al SNCA se asemeja al de un espectrograma, en el sentido siguiente: “cuando comparas el espectrograma con las respuestas neuronales, notarás una relación clara y directa entre la energía del sonido y las distribuciones de frecuencia de activación neuronal [PSTH]” [3, p. 80]. La Figura 4.13 ilustra esta última afirmación, se trata de un experimento [116] (también mencionado en [3]) realizado por Delgutte, que consistió en lo siguiente.

1. Se realizaron 8 PSTHs, cada uno asociado a la respuesta de entre 2 a 7 fibras nerviosas auditivas de un gato, al estímulo sonoro de una voz pronunciando el enunciado “Joe took father’s green shoe bench out”.
2. Las fibras nerviosas de cada histograma se eligieron tal que la frecuencia característica ϕ_i , $i \in \{1, 2, \dots, 8\}$ de cada fibra se encuentre en un ancho de banda de media octava (respecto a una frecuencia fija), es decir, para cada histograma las frecuencias características de las fibras elegidas se encontraron en el inter-

valo $\left(\frac{\phi_i}{(2^{\frac{1}{12}})^6}, \phi_i (2^{\frac{1}{12}})^6 \right) = \left(\frac{\phi_i}{\sqrt{2}}, \phi_i \sqrt{2} \right) \subseteq \mathbb{R}$ con $400 < \phi_i < 4000$ para cada $i \in \{1, 2, \dots, 8\}$. Las frecuencias ϕ_i se representan con pequeñas marcas en el eje de las ordenadas de la Figura 4.13 A (en el artículo no se especifican las frecuencias concretas).

Se apilaron los histogramas de menor a mayor frecuencia y se comparó el arreglo con el espectrograma correspondiente al estímulo sonoro. Como resultado se observa una clara relación entre el arreglo de PSTHs (Delgutte llama este arreglo “neurograma”) y el espectrograma de estímulo por lo siguiente: un volumen de sonido significativo en un determinado rango de frecuencias del espectrograma (escala de grises) corresponde a una frecuencia de disparo significativa en los histogramas correspondientes o cercanos al rango de frecuencia en cuestión, también se observa que ambas representaciones comparten el mismo instante de inicio de la actividad sonora u *onsets*⁹.

La tesis final (respecto al tercer sector del sistema auditivo) de Schnupp y colegas, es que las fibras nerviosas auditivas terminan por entregarle al SNCA la información sonora en una representación que se asemeja al de un espectrograma (ver §3.1.1), pues es una representación en función de tres magnitudes: 1. tiempo, 2. lugar (frecuencia), que corresponde al tren de disparo en una fibra con una frecuencia característica y 3. intensidad, correspondiente a la frecuencia de disparo.

Se propone la última transformación de un sonido al llegar al SNCA como sigue:

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_6 : \quad \mathcal{C}_c(\mathbb{R})^n &\rightarrow M_{n \times 20}(M(\mathbb{R}_{>0})) \\ (h_1(f_{\text{MB}}(t, x_1)), \dots, h_n(f_{\text{MB}}(t, x_n))) &\mapsto \begin{pmatrix} S_{11}(t) & \dots & S_{120}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{n1}(t) & \dots & S_{n20}(t) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.12)$$

$\bar{\lambda}_6$ toma el vector $(h_1(f_{\text{MB}}(t, x_1)), \dots, h_n(f_{\text{MB}}(t, x_n)))$ y lo transforma en la matriz con entradas en $M(\mathbb{R}_{>0})$ (funciones medibles de $\mathbb{R}_{>0}$ a $\mathbb{R}$). Cada entrada $h_i(f_{\text{MB}}(t, x_i))$ se transforma en un vector de veinte entradas: $(S_{i1}(t), \dots, S_{i20}(t))$ (correspondiente al i -ésimo renglón de la matriz), donde cada entrada es un tren de disparo $S_{ij}(t)$, definido como $S_{ij}(t) = 1$ si hay un potencial de acción al tiempo t y 0 e.o.c. Se espera que cada vector de 20 entradas preserve la información de la función $h_i(f_{\text{MB}}(t, x_i))$. Existen definiciones matemáticas más especializadas para un tren de disparo (por ejemplo, con deltas de Dirac [117, Sec. 1.3.3]), además de que la teoría de la probabilidad en este punto es imprescindible, pues el disparo de una neurona es un fenómeno aleatorio. También existen toda una teoría desarrollada para abordar el tratamiento y la interpretación de la información que transporta un tren de disparo, apoyada en la teoría de la información de Shannon [113]. Se deja la discusión del proceso de audición hasta este punto (por ahora).

⁹Se denomina *onset* a cada inicio de una actividad sonora significativa (incremento súbito de volumen). En el caso del experimento de Delgutte, los *onsets* están determinados por cada inicio de una sílaba del estímulo sonoro y es fácil identificarlos. En general determinar un onset para una señal de audio arbitraria requiere de un criterio que involucre intervalos de tiempo y umbrales de volumen elegidos a conveniencia y de acuerdo a la actividad que se desee analizar.

4.3. Resumen del proceso de audición para los primeros tres sectores del oído

Se concluye el apartado dedicado a los primeros tres sectores del oído con la Tabla 4.2 y la Figura 4.14 que sintetizan todo lo mencionado hasta ahora.

	Parte	Alteración sonora	Representación del sonido (señal)
OÍDO EXTERNO	Oreja	Altera el espectro de una onda sonora incidente en función de su dirección de procedencia. Transformación $\bar{\lambda}_1$ en (4.2).	Onda sonora, función $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ que describe los cambios en la presión (respecto a la presión atmosférica normal) en el tiempo
	Tímpano	Transducción de ondas sonoras a oscilaciones mecánicas. Transformación $\bar{\lambda}_2$ en (4.3)	Oscilación mecánica, función $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ que describe los cambios en la posición del cuerpo (respecto a su posición en reposo) en el tiempo
OÍDO MEDIO	Huesecillos del oído	Amplifican las oscilaciones (con ayuda del tímpano) alrededor de 30 dB	
	Base del estribo	Transducción de oscilaciones mecánicas a ondas sonoras propagadas por el líquido perilinfa de la cóclea. Transformación $\bar{\lambda}_3$ en (4.8)	
OÍDO INTERNO	Membrana basilar (MB)	Transducción de ondas sonoras acuáticas en ondas longitudinales en la MB y descomposición de las frecuencias que componen el sonido debido a la tonotopía. Transformación $\bar{\lambda}_4$ en (4.10)	Función $f \in C_c^0(\mathbb{R}_{>0} \times [0, b_m])$ que describe el movimiento de la membrana basilar de longitud b_m (ondas transversales) a lo largo del tiempo
	Células ciliadas interiores y exteriores	- CCIs: transducción de las vibraciones de la MB en señales de voltaje y compresión si la señal rebasa un umbral de amplitud. Transformación $\bar{\lambda}_5$ en (4.11) - CCEs: amplificación (no lineal compresiva)	Vector $u \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}_{>0})^n$ donde cada entrada describe los cambios de voltaje en las CCIs para frecuencias bajas y a medida que la frecuencia incrementa solamente se tienen valores constantes o 0
	Fibras nerviosas auditivas tipo I	Transducción de señales de voltaje en trenes de disparo. Transformación $\bar{\lambda}_6$ en (4.12)	Representación ritmo-lugar o neurograma. Matriz de trenes de disparo $v \in M_{n \times 20}(M(\mathbb{R}_{>0}))$, que codifican el volumen (frecuencia de disparo), <i>onsets</i> y duración (inicio y duración de la actividad neuronal) y frecuencia (cada tren asociado a la frecuencia característica de la fibra por el que es transmitido). Hay registro de actividad temporal para frecuencias bajas (<i>phase locking</i>)

Tabla 4.2: Alteraciones y transducciones que sufre un sonido a lo largo de los primeros tres sectores del sistema auditivo.

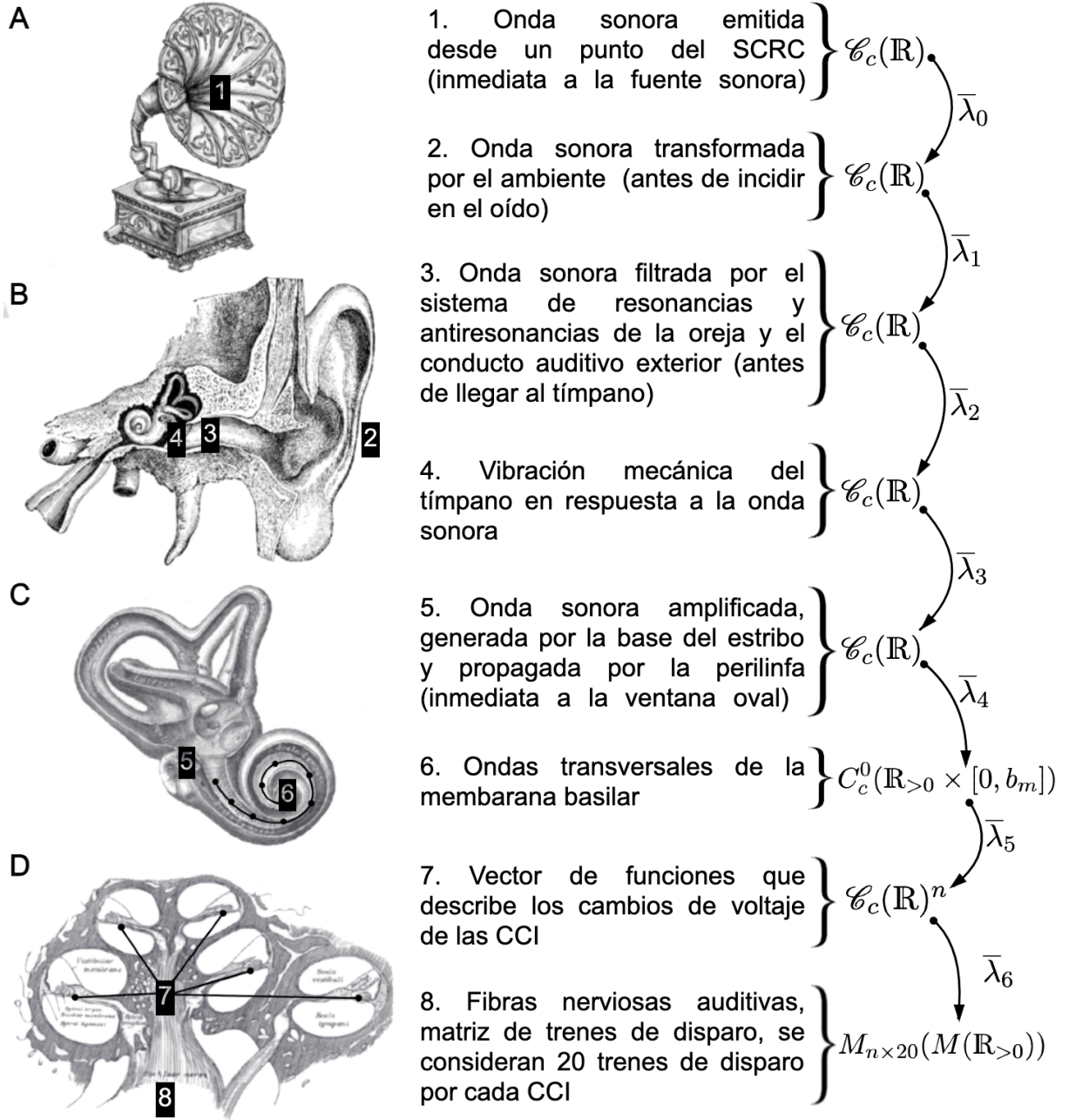


Figura 4.14: Esquema que ilustra las transformaciones que se proponen en (4.1), (4.2), (4.3), (4.8), (4.10), (4.11) y (4.12) (comportamientos en cascada). Imágenes tomadas de: **A** “Hand draw gramophone sketch design” por Harryarts en [Freepik.com](https://www.freepik.com). **B** Dibujo anatómico del oído Meyers *Konversations-Lexikon*. **C** “Interior del laberinto óseo derecho” y **D** “Sección diagramática longitudinal de la cóclea”, dibujos anatómicos de la cóclea por Henry Vandyke encontrados “Anatomy of the Human Body” de Henry Gray [118].

4.4. Introducción a las imágenes auditivas de Lyon

El libro *Human and Machine Hearing: Extracting Meaning From Sound* (2017) [23] de Richard Lyon presenta un modelo para diseñar una “máquina auditiva” capaz de simular

el sistema auditivo humano. Lo anterior presupone y exige un conocimiento del proceso fisiológico de audición, aunque este proceso aún no se comprende del todo, Lyon busca capturar y modelar los aspectos conocidos de dicho proceso. En el breve prefacio a la obra, Roy Patterson sintetiza cómo es que Lyon pretende realizar esta tarea, vale la pena citar el párrafo completo.

La idea de Lyon de un sistema de *machine hearing* tiene cuatro “capas”. Las primeras dos simulan el análisis de frecuencias auditivas en la cóclea y la construcción de la imagen auditiva en el tronco encefálico. Juntas forman un modelo auditivo que pretende simular todo el procesamiento mecánico y neuronal necesario para producir tu imagen auditiva inicial de un sonido, es decir, la representación auditiva interna del sonido que se cree que proporciona la base para la percepción, transmisión, análisis de la escena auditiva, y todo el procesamiento posterior. La tercera capa aplica la extracción de características dependientes de la aplicación a la imagen auditiva y reduce la masa de características a una forma dispersa para la cuarta capa, que extrae el significado con técnicas de aprendizaje profundo. Juntas, la tercera y la cuarta capa convierten el modelo auditivo en una forma específica de máquina auditiva, diseñada para realizar una tarea auditiva particular. [23, p. xv].

La Figura 4.15 sintetiza el sistema *machine hearing* que propone Lyon.

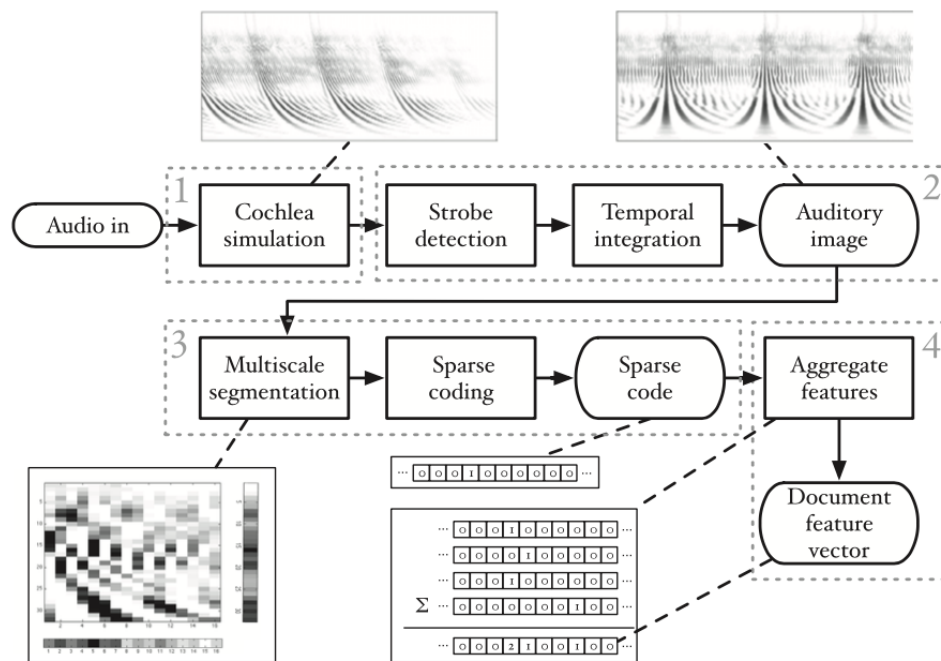


Figura 4.15: Diagrama que muestra las cuatro capas del sistema de *machine hearing* de Lyon. Figura de [23, Fig. 26.1].

En el párrafo citado aparece el término “imagen auditiva”, el objetivo de esta sección es explicar *grosso modo* este concepto, pues se busca evidenciar como la teoría de sistemas LIT juega un papel fundamental en la teoría de Lyon. Este autor menciona que el concepto de imagen auditiva se inspirara tanto en el modelo de Jeffress de localización de una pista

DTI, como el modelo de Licklider de percepción de la *altura*¹⁰. A continuación se explican estos modelos, para después abordar las imágenes auditivas.

4.4.1. El modelo del procesamiento de una pista de DTI de Jeffress

En el artículo *A place theory of sound localization* (1946) [119], Jeffress propone un modelo del mecanismo de comparación que presupone una pista de DTI. En la Figura 4.16 se tiene una representación gráfica del modelo. Para cada oído (*auditory tract*), se considera el camino que recorre una única fibra nerviosa auditiva. Por todo lo mencionado hasta ahora, se puede suponer que las fibras tienen una frecuencia característica ϕ_0 . Entonces ante un tono puro $f(t) = A \sin(2\pi\phi_0 t)$ emitido desde una dirección determinada (θ_0, ϕ_0) , ocurre lo siguiente: cada fibra de cada oído envía la información sonora por dos posibles caminos (marcados como **a** y **b** para el caso izquierdo en la Figura 4.16). El camino **a** se dirige a la escalera ipsilateral mientras que el camino **b** se dirige a la escalera contralateral. Centrando la atención en la escalera izquierda, esta recibe la información del oído izquierdo en el punto **X**, y del derecho en **Y**.

Dependiendo de la dirección (θ, ϕ) , puede que la información llegue primero a **X** o a **Y**. Ante el tono puro f emitido en el plano sagital (el plano que parte simétricamente en dos al cuerpo humano), tanto la fibra auditiva izquierda como la derecha envían información al mismo tiempo, pues el sonido llega a ambos oídos al mismo tiempo, y además (para este caso) se postula que la información de cada oído llega a los puntos **X** y **Y** *al mismo tiempo*. Posteriormente a la llegada de la información (tren de disparo) a **X** y **Y**, en ambos puntos la información se distribuye en 7 vías de transmisión. Se considera que la información de cada una de las fibras que componen la escalera es transmitida por orden y en un intervalo de tiempo t_0 regular, es decir, el tren llega al punto **Y** y se comienza a medir el tiempo, de modo que al tiempo 0, la información enviada llega primero a la “fibra terciaria” (*tertiary fiber* - TF) número 7, al tiempo t_0 llega a la TF 6, al tiempo $2t_0$ se llega la TF 5, y así sucesivamente hasta que al tiempo $6t_0$ se llega a la TF 1. De la

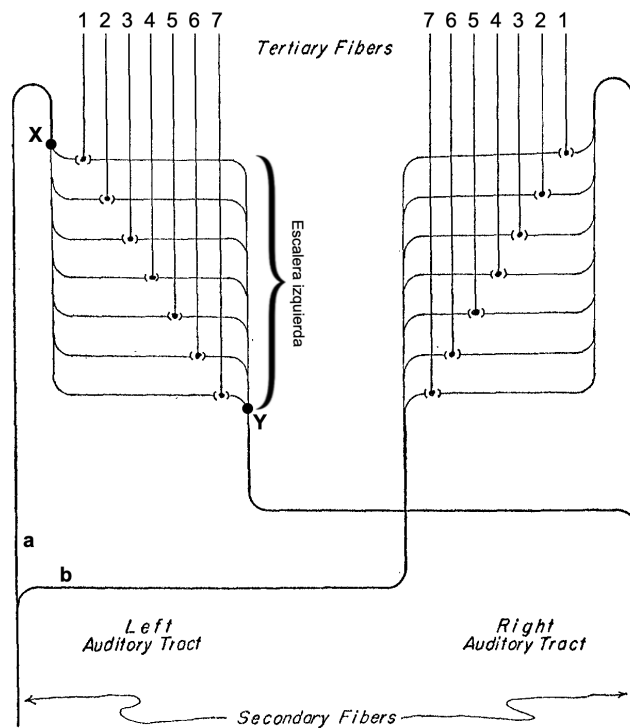


Figura 4.16: Modelo de Jeffress del procesamiento de una pista de DTI. Adaptado de [119, Fig. 1].

⁹En el siguiente capítulo se abordará con más atención esta pista, por ahora, basta recordar lo mencionado en §1.1.1, la pista DTI conociste en asociar un intervalo interaural de tiempo con una dirección determinada.

¹⁰Se traduce el término inglés “*pitch*” como “altura”. Por este término se entiende al juicio que da cada persona, de qué tan agudo o grave es un sonido percibido. El juicio de la altura de un sonido se traduce en asignarle una frecuencia (o frecuencias) al mismo.

misma forma, ante el tren que llega al punto **X**, se comienza a medir el tiempo, de modo que al tiempo 0, la información llega inmediatamente a la TF 1, al tiempo t_0 llega a la TF 2, al tiempo $2t_0$ a TF 4, hasta que al tiempo $6t_0$ se llega a la TF 7. Con lo anterior en cuenta, Jeffress explica que en el modelo, la activación de una fibra terciara ocurre si y solo si *esta recibe información de ambos lados al mismo tiempo o dos fibras consecutivas son activadas con un retraso de un intervalo de tiempo*. Por ejemplo, la fibra terciaria 4 responde ante un sonido emitido en el plano sagital, pues dado que en este caso la información de ambos oídos llega al mismo tiempo al punto **X** y **Y**, se tiene que al tiempo 0, la TF correspondiente a **X** llega a la TF 1 y la correspondiente a **Y** llega a la TF 7, al primer intervalo de tiempo t_0 , la TF **X** llega a la TF 2 mientras que la TF **Y** llega a la 6 etc. El único caso en el que una fibra terciaria es activada al mismo tiempo es cuando han transcurrido tres intervalos de tiempo $3t_0$ pues en este instante tanto la fibra correspondiente al punto **X** como el **Y** llegan a la fibra terciaria 4. Con el mismo razonamiento se puede ver como las fibras terciarias 1, 2 y 3 están asociadas a un sonido emitido a la derecha del plano sagital y las fibras 5, 6 y 7 a sonidos a la izquierda del plano. Dependiendo del retraso entre las llegadas a los puntos **X** y **Y** puede que exista un intervalo en el que coincida la llegada de ambos lados en única fibra terciaria, o el otro caso es que exista un intervalo en el que la información llegue con una fibra de diferencia. En el modelo de Jeffress, la activación de las fibras terciarias se traduce en la identificación de una dirección propia de una pista de DTI. Jeffress menciona que se toman siete vías para las fibras terciarias como ejemplo ilustrativo, pero aclara que el modelo puede admitir un número arbitrario, y se espera que este mecanismo actúe en cada una de las fibras por cada frecuencia característica.

4.4.2. El modelo de percepción de altura de Licklider

En el artículo titulado *A duplex theory of pitch perception* (1951) [111], Licklider propone un modelo que busca explicar la forma en que el sistema auditivo puede inferir la altura de un sonido. Para poder explicar el modelo, primero es necesario explicar brevemente la dificultad que encierra la identificación de la altura por parte del SNCA.

Hasta ahora, únicamente se ha mostrado (según la tesis de Schnupp y colegas), que la cóclea le entrega al SNCA un neurograma. Una pregunta natural es: ¿cómo es que el SNCA (a partir de dicho neurograma) deduce la altura de un sonido arbitrario? Tal cuestión no es fácil de responder debido a que la altura es una variable subjetiva más que física [54, Sec. 2.1], por lo que hay confusión en conceptos tan básicos como el significado del término “altura” como posible atributo de un sonido arbitrario [54, Sec. 6.2.5], además, “varios sonidos con misma altura pueden tener composición frecuencial distinta, mientras que sonidos con bastante composición frecuencial similar pueden evocar distintas alturas” [3, p. 95]. El caso sencillo (y que en principio parece redundante) es deducir la altura de un estímulo de tono puro, en este caso el SNCA podría determinarla fácilmente de la siguiente forma: un estímulo de tono puro con frecuencia ϕ_0 se traduce en el desplazamiento máximo en el punto asociado a ϕ_0 de la MB (determinado por su tonotopía), a su vez esto se traduce en la actividad neuronal de fibras nerviosas cuya frecuencia característica es ϕ_0 , así, la altura del tono puro es (como se espera) la frecuencia del tono puro mismo. El caso difícil y que aún está en debate [54, Cap. 6], es cómo determinar la altura de un sonido arbitrario (si es que la tiene), pues un sonido complejo producirá actividad significativa a lo largo de toda la MB, lo que se traduce en distintos componentes frecuenciales del sonido y transportados por una gran cantidad de fibras nerviosas, entonces, una pregunta importante es: de todo este conjunto de frecuencias (o armónicos, cuando

el sonido es periódico) ¿cuál de ellas corresponde a la altura, o cómo es posible deducir la altura a partir de este conjunto? Ohm postuló que ante este escenario, la altura consiste en identificar la frecuencia fundamental, que corresponde a la menor componente de la descomposición de Fourier del sonido [54, Cap. 2]. Si bien esto funciona para la mayoría de sonidos periódicos (p. ej. timbres musicales) resulta que sustraer artificialmente la frecuencia fundamental de un sonido periódico aún produce la altura de la fundamental, esto último llevó a la hipótesis de que los armónicos restantes producen un movimiento en el punto de la MB correspondiente a la fundamental en su tonotopía, o en otras palabras, “si se eliminan los armónicos inferiores del estímulo físico, se pueden reintroducir mediante distorsión en la cóclea” [54, p. 14], aunque esto último puede ocurrir, Licklider demostró que la altura aún se percibe incluso si se suprime la fundamental y además se reemplaza por ruido [54, Cap. 2]. Por otra parte, también se debe tomar en cuenta que existen sonidos no periódicos que evocan la percepción de altura [3, Sec. 3.2]. Ante este problema, se han propuesto distintas teorías y modelos, que buscan explicar cómo a partir de las componentes frecuenciales, el SNCA determina una altura. De Cheveigné [54, Cap. 6] y Lyon [23, Cap. 2] dan una extraordinaria exposición de tales posturas, entre ellas está la de Licklider. Este autor teoriza que el SNCA realiza operaciones de autocorrelación para identificar la altura de un sonido y al igual que Ohm, considera que basta con identificar la frecuencia fundamental de un sonido periódico para inferir su altura. El modelo provee de una manera de hacer esto incluso si la fundamental está ausente.

Definición 4.4.1. Sea $f \in \mathcal{RL}_p^2(0, T)$, se define la **función de autocorrelación** de f , denotada “ r_f ” como

$$r_f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tau \mapsto r_f(\tau) := \langle f, f_\tau \rangle := \int_0^T f(t)f(t-\tau) dt, \quad (4.13)$$

donde $f_\tau(t) := f(t-\tau)$ para cada $\tau \in \mathbb{R}$. ┘

Proposición 4.4.2. Para toda $f \in \mathcal{RL}_p^2(0, T)$, la función r_f está bien definida y alcanza puntos máximos en $\tau = \frac{n}{T}$ con $n \in \mathbb{Z}$. ┘

Prueba. Ver Prop. A.2.3 en la página 186. □

Por otra parte, aunque f no sea periódica, si $f \in L^2(\mathbb{R})$ se puede definir $r_f(\tau) := \int_{\mathbb{R}} f(t)f(t-\tau) dt$ y esta función también tiene un máximo en 0 (el argumento es análogo al de la Prop. 4.4.2). La autocorrelación es una herramienta útil para determinar fenómenos “cuasi-periódicos”. Intuitivamente, r_f responde a la pregunta ¿qué tanto se parece f a sí misma pero recorrida τ_0 unidades en el tiempo? si el parecido es alto, se tendrá que $r_f(\tau_0) \approx r_f(0)$.

Explicación del modelo de Licklider

Se considera la función $f_{\text{MB}}(t, x)$ de la transformación definida en (4.10), que describe las posiciones de la membrana basilar al tiempo t . Fijando un punto $x_i \in P_{\text{MB}}$ partición de la longitud de la membrana basilar (ver lo mencionado en 4.11 en la página 94), se tiene

¹⁰Un sonido periódico es un elemento de $\mathcal{RL}_p^2(0, T)$, por lo que se puede ver como suma de funciones sinusoidales, donde cada sumando tiene frecuencia que es un múltiplo entero de la “fundamental”, es decir de $\phi_0 = \frac{1}{T}$ (ver (2.55)).

la función $f_{MB}(t, x_i)$ que describe el movimiento oscilatorio del punto x_i fijo a lo largo de la membrana al tiempo t . Este movimiento se ve reflejado en los cambios de voltaje de las CCI (salvo la compresión-amplificación y la introducción de corriente directa a medida que la frecuencia aumenta) y posteriormente en las fibras nerviosas auditivas. La posición x_i tiene una frecuencia audible ϕ_i asociada mediante la tonotopía de la MB. Licklider supone que la cóclea realiza esencialmente lo mismo que el “espectrógrafo de sonido” desarrollado por los laboratorios Bell, que es una de las primeras máquinas capaces de analizar las componentes frecuenciales de un sonido y producir su espectrograma [120].

Observación 4.4.3. *El modelo supone que, ante un sonido emitido en la cóclea, $f_{MB}(t, x_i)$ es una función periódica (continua), cuyo periodo es $\frac{1}{\phi_i}$. Por lo que esto se supondrá en lo que resta de la explicación.* J

$f_{MB}(t, x_i)$ se transforma en a lo más veinte trenes de disparo (ver (4.12)). Sea entonces $S_A(t)$ un tren de disparo asociado a la función $f_{MB}(t, x_i)$. En la Figura 4.17, se presenta un esquema básico del proceso neuronal de autocorrelación de Licklider, el punto A representa el camino del tren de disparo en cuestión, un camino de la bifurcación distribuye el tren S_A a las neuronas C_k , mientras que el otro llega a las neuronas B_k asociadas con un valor de retraso τ , de modo que el estado de B_k ante el tren S_A es $S_A(t - k\tau)$. B_k tiene conexión con la neurona C_k , de esta forma C_k recibe potenciales de acción de dos neuronas distintas y se postula que es necesario que B_k y A disparen de manera “casi simultánea” para que C_k sea activada¹¹. Entonces el tren de disparo de C_k es $S_{C_k}(t) = S_A(t)S_A(t - k\tau)$. D_k realiza una operación equivalente a la autocorrelación de la Def. 4.4.1 acumulando los potenciales de acción de C_k y disipándose “quizá a una tasa proporcional a la cantidad acumulada” [111, p. 129]. Así, D_k produce el tren de disparo $\overline{S_A(t)S_A(t - k\tau)}$, donde la línea “—” simboliza la operación de autocorrelación o una operación análoga compatible con este caso¹². Queda por aclarar cuál es la operación explícita que representa “ $\overline{S_A(t)S_A(t - k\tau)}$ ”.

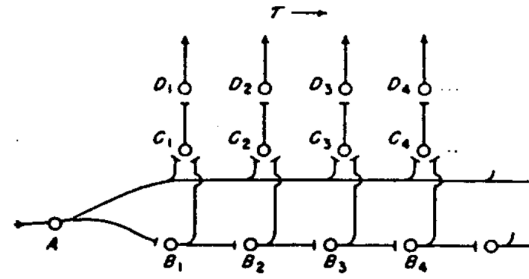


Figura 4.17: Adaptado de [111, Fig. 1].

Licklider explica la construcción de esta operación paso a paso, y la denomina función de “autocorrelación en desarrollo” (*running autocorrelation function*), sin embargo no lo hace en términos de trenes de disparo, sino en términos de las funciones $f_{MB}(t, x_i)$.

Sea entonces f una de las funciones $f_{MB}(t, x_i)$ para alguna $x_i \in P_{MB}$. En referencia a la Figura 4.18, en **A** se muestran las gráficas de $f(t)$ y $f(t - \tau_j)$ con $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. **B** muestra su producto $f(t)f(t - \tau_j)$. Haciendo el cambio de variable $t = t_k - T$ para una $t_k > 0$ fija, se obtiene la función $h(T) = f(t_k - T)f(t_k - \tau_j - T)$, mostrada en **C**, donde también se muestra una función $w(T)$ decreciente. Nótese como en **C** y **D** se dibujan las funciones de modo que el dominio avanza hacia la izquierda. En **D** se muestra el producto $h(T)w(T)$ y en **E** la función $\phi(t, \tau_j) = \int_{\mathbb{R}_{>0}} h(T)w(T) dT$, de la cuál $\phi(t_k, \tau_j)$ es uno de sus puntos.

¹¹En este aspecto hay una gran similitud con el modelo de Jeffress

¹²El ejemplo toma una fibra nerviosa de referencia, sin embargo (al igual que hace Jeffress) Licklider menciona que el modelo se considera como un trabajo en conjunto entre fibras, siendo capaz de relacionar las respuestas de un grupo de ellas con frecuencia característica similar.

A representan la información enviada por un grupo de neuronas a través de las fibras nerviosas auditivas, así como su proceso de retraso ejemplificado por el grupo de neuronas **B** de la Figura 4.17. **B** representa el producto de ambas funciones que realizan las neuronas **C**. Para verificar el proceso de autocorrelación para τ_j , se tendría que calcular " $\int_{\mathbb{R}} f(t)f(t-\tau_j) dt = r_f(\tau_j)$ ", pero "no sabemos nada de los futuros de los mensajes que recibimos" [111, p. 132], por ello se tiene la función $h(T)$ en **C**, que se puede interpretar como fijar un tiempo t_k de la función $f(t)f(t-\tau_j)$ y analizar su "pasado", es decir, las t 's tales que $t < t_k$. De esta forma solo bastaría hacer la autocorrelación de 0 a ∞ , donde $T = 0$ es el instante presente t_k , y el incremento hacia ∞ representa el pasado. Así, se podría realizar la autocorrelación mediante " $\int_{\mathbb{R}_{>0}} f(t_k - T)f(t_k - \tau_j - T) dT$ ", solo hay un factor más que debe tomarse en cuenta: "el sistema auditivo solamente opera en el presente y en el 'no-tan-extremo-pasado-distante' del estímulo acústico" [111, p. 132]. Por lo tanto se añade el producto de la función $w(T)$ que al ser decreciente y positiva, privilegia los valores presentes (ceranos a 0 en su dominio) y le da menos peso a los valores más antiguos (alejados de 0 en su dominio), a w se le denomina *weighting function*, para los propósitos de este modelo, basta con considerar $w(T)$ como cualquier función decreciente, positiva e integrable en $\mathbb{R}_{\geq 0}$ (por ejemplo $w(T) = e^{-cx}$ para algún $c \in \mathbb{R}_{>0}$) y que vale 0 en los negativos. La Figura 4.18 **D** ilustra la intención detrás de introducir w al producto de $f(t_k - T)f(t_k - \tau_j - T)$, donde, los valores que más contribuyen a la integral (zonas coloreadas en negro) son los cercanos a 0. Todo lo anterior motiva la siguiente definición.

Definición 4.4.4. [Licklider] Sean $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ y $w \in L^1(\mathbb{R})$ tal que $w(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, se define la **función de autocorrelación en desarrollo (ACD)** denotada ϕ_f como

$$\begin{aligned} \phi_f : \quad \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (t, \tau) &\mapsto \phi_f(t, \tau) = \int_{\mathbb{R}_{>0}} f(t - T)f(t - \tau - T)w(T) dT. \end{aligned} \quad (4.14)$$

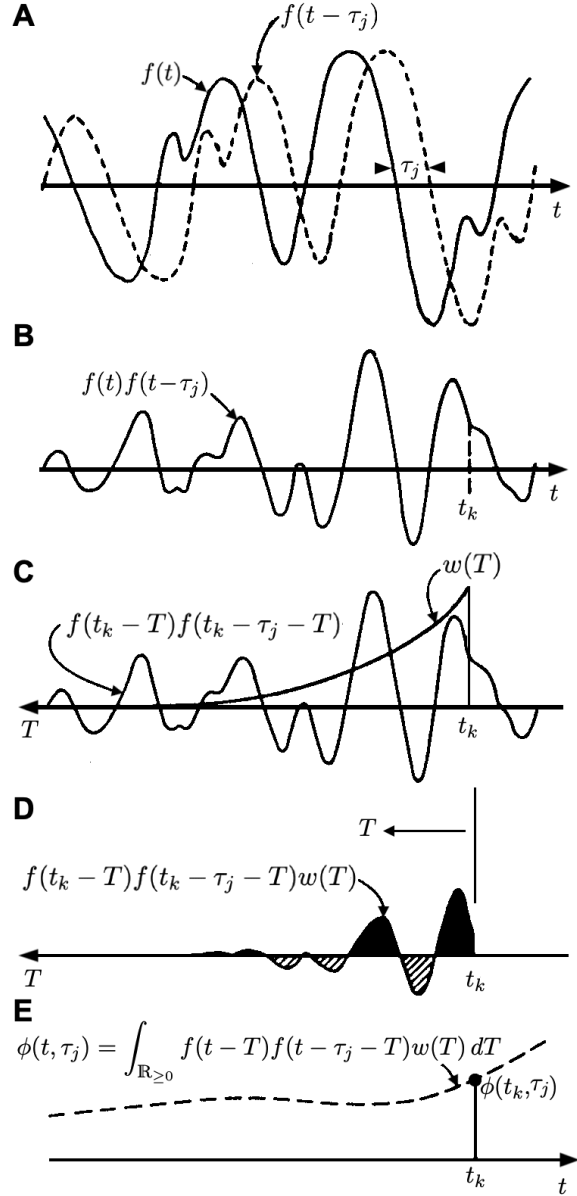


Figura 4.18: Construcción de la función de autocorrelación en desarrollo de Licklider. Adaptado de [111, Fig. 4].

La Figura 4.18 **D** ilustra la intención detrás de introducir w al producto de $f(t_k - T)f(t_k - \tau_j - T)$, donde, los valores que más contribuyen a la integral (zonas coloreadas en negro) son los cercanos a 0. Todo lo anterior motiva la siguiente definición.

Proposición 4.4.5. *La función ACD está bien definida y es uniformemente continua (por lo que su gráfica es una superficie en $\mathbb{R}^3$).* ┘

Prueba. Ver Prop. A.2.12 en la página 191. □

La función ACD es muy similar a una autocorrelación, pues $r_{f(t-T)}(\tau) = \int_{\mathbb{R}} f(t-T)f(t-T-\tau) dT$, y esta última difiere de la función ϕ_f únicamente por la ausencia de la función w y el hecho de que la integral está definida para los reales positivos.

El modelo de Licklider propone que el SNCA aplica la función ACD a cada $f_{\text{MB}}(t, x_i)$, con $x_i \in P_{\text{MB}}$ y para $w \in L^1(\mathbb{R})$ exponencial decreciente. La función $\phi(t, \tau_j) = \int_{\mathbb{R}_{>0}} f(t-T)f(t-\tau_j-T)w(T) dT$, en **E**, corresponde a un corte de la superficie formada por la función $\phi(t, \tau)$ de la Def. 4.4.4 con $\tau = \tau_j$, y donde $\phi(t_k, \tau_j)$ es un punto de tal corte.

La teoría de Licklider concluye que, ante un sonido, la cóclea termina por enviar al SNCA el conjunto de superficies $\{\phi_{f_{\text{MB}}}^{x_i} : x_i \in P_{\text{MB}}\} \subseteq \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$, donde cada $\phi_{f_{\text{MB}}}^{x_i}$ está dada por

$$\begin{aligned} \phi_{f_{\text{MB}}}^{x_i} : \mathbb{R}_{\geq 0}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (t, \tau) &\mapsto \phi_{f_{\text{MB}}}^{x_i}(t, \tau) = \int_{\mathbb{R}_{>0}} f_{\text{MB}}(t-T, x_i) f_{\text{MB}}(t-\tau-T, x_i) w(T) dT \end{aligned} \quad (4.15)$$

Es decir, se aplica la función de autocorrelación en desarrollo a cada $f_{\text{MB}}(t, x_i)$ con $x_i \in P_{\text{MB}}$. Para t_k fijo, **F** (Figura 4.19) muestra el corte $\phi(t_k, \tau)$, que se interpreta como la autocorrelación aplicada al comportamiento más reciente de una función $f_{\text{MB}}(t, x_i)$. Por otra parte, para τ_j fijo, el corte $\phi(t, \tau_j)$ muestra el comportamiento de la función de autocorrelación para un único punto τ_j a lo largo del tiempo.

Inferir la altura a partir del modelo

Queda por argumentar cómo es que a partir del conjunto de superficies $\{\phi_{f_{\text{MB}}}^{x_i} : x_i \in P_{\text{MB}}\}$, el SNCA pueda inferir la altura de un sonido periódico. La Figura 4.20 **A** esquematiza todo el modelo de Licklider: la dimensión x corresponde a la longitud de la membrana basilar (al eje x también se le denomina eje de la frecuencia característica - CF) y genera las funciones $f_{\text{MB}}(t, x_i)$ que a su vez codifican el grupo de neuronas A para distribuirla al grupo de neuronas B en la dimensión τ , perpendicular a la dimensión x . Posteriormente el grupo de neuronas C genera la superficie (codificada en trenes de disparo) descrita en la Figura 4.19 **F** mediante la función $\phi_{f_{\text{MB}}}^{x_i}(t, \tau)$ de la Def. 4.15.

En un tiempo t_k fijo, se tiene un conjunto de cortes

$$\mathcal{C}_{t_k} = \{\phi_{f_{\text{MB}}}^{x_i}(t_k, \tau) : x_i \in P_{\text{MB}}\} \subseteq \mathbb{P}(\mathbb{R}^2), \quad (4.16)$$

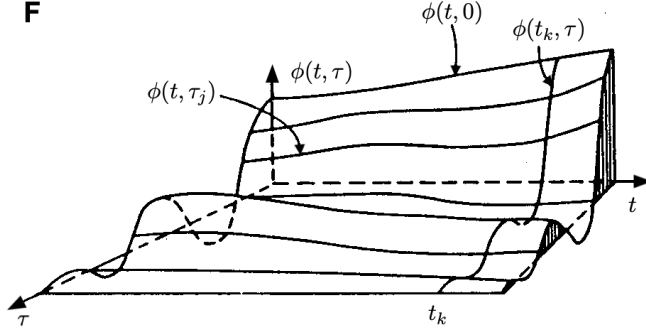


Figura 4.19: Superficie generada por la función de autocorrelación en desarrollo. Adaptado de [111, Fig. 4].

Se enfatiza la siguiente observación.

Observación 4.4.6. Para $x_i \in P_{MB}$ y $t_k \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ fijos, la función $\phi_{f_{MB}}^{x_i}(t_k, \tau)$ (cuya única variable es τ) se interpreta como la función de autocorrelación r (Def. 4.4.1), aplicada al comportamiento más reciente de la función $f_{MB}(t, x_i)$ con $0 < t < t_k$. $\lrcorner$

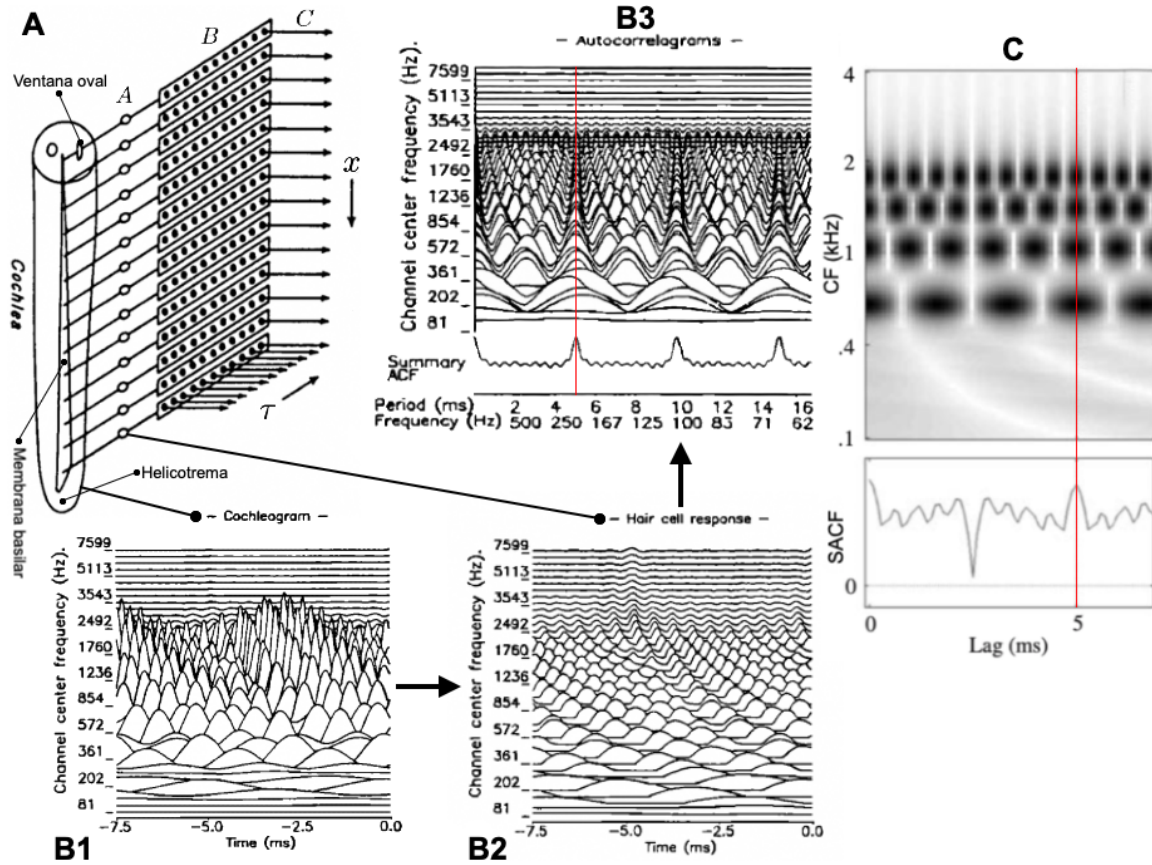


Figura 4.20: **A** esquema del modelo de Licklider. Adaptado de [111, Fig. 2]. **B1** cocleograma, **B2** respuesta de las CCIs al cocleograma, **B3** autocorrelograma asociado a las respuestas de cada CCI y SACF. Modelo de detección de tono de Meddis y Hewitt en respuesta a los diez primeros armónicos de un tono con frecuencia 200 Hz. Adaptado de [121, Fig. 3]. **C** Autocorrelograma y SACF en respuesta a los armónicos 3, 5, 7 y 9 del tono fundamental 200 Hz. Aunque no está presente la fundamental, es posible deducirla a través de la SACF o notando dónde se alinean todas las crestas (zonas oscuras) de cada armónico. Adaptado de [54, Fig. 6.9]. **B3** y **C** son una aplicación del modelo de Licklider y cada gráfica es un ejemplo del conjunto $\mathcal{C}_{t_k}$ definido en (4.16), para un tiempo t_k .

Si se “apilan” las gráficas de cada elemento de $\mathcal{C}_{t_k}$, ordenándolas respecto a su frecuencia característica se obtiene un *autocorrelograma* (Figuras 4.20 **B3** y **C**), resulta que, “si el estímulo es periódico, una cresta se extiende por la dimensión CF con un retraso igual al período. El tono puede derivarse de la posición de esta cresta, pero Licklider en realidad no proporcionó un procedimiento para hacerlo” [54, p. 194]. El modelo explota el teorema de Fourier: toda función periódica (cuadrado integrable en el periodo) se puede representar como suma de funciones sinusoidales cuyas frecuencias son múltiplos enteros de la frecuencia fundamental (recordar (2.55)), de esto último, de la Prop 4.4.2 y de las Observaciones 4.4.3 y 4.4.6, se sigue que, ante un sonido periódico $s(t)$ con frecuencia

fundamental φ_0 , que se genera en la ventana oval de la cóclea, ocurrirá que el periodo de cada función $\phi_{f_{MB}}^{x_i}(t_k, \tau) \in C_{t_k}$ es n_i/φ_0 , para algún $n_i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ con φ_0 la frecuencia fundamental de $s(t)$, y por lo tanto se puede asegurar que si se apilan las funciones $\phi_{f_{MB}}^{x_i}(t_k, \tau)$, siempre coincidirán en el periodo igual a $1/\varphi_0$ pues es el mínimo común múltiplo de los periodos de cada $\phi_{f_{MB}}^{x_i}(t_k, \tau)$.

Para ilustrar mejor la idea del autocorrelograma de Licklider, en las Figuras 4.20 **B1**, **B2** y **B3**, se tiene la simulación de un modelo del oído interno de Meddis y Hewitt [121] en respuesta los primeros diez armónicos del tono puro con frecuencia 200 Hz (todos los armónicos con misma amplitud), las tres gráficas muestran los últimos 7.5 ms del estímulo. En **B1** se tienen apiladas las funciones que describen el movimiento de la MB para cada punto x_i (*channel center frequency*), esta representación se denomina *cocleograma* y proviene de un banco de filtros que buscan simular la respuesta de la membrana a cualquier sonido, tal representación es una propuesta a la transformación descrita en 4.10. Se observa una irregularidad en la amplitud de las crestas de cada función, siendo mayor para frecuencias alrededor de 2.5 kHz, posteriormente en **B2** se tienen las respuestas de las CCIs al cocleograma (*hair cell response*), ahora la irregularidad de las amplitudes del cocleograma se ha subsanado, esto se debe a que el modelo considera la cualidad de compresión que poseen las CCIs.

La información se lleva por el grupo de neuronas A hacia el proceso de autocorrelación realizado por el grupo de neuronas B y C previamente descrito. A cada función en **B2** se le aplica la autocorrelación en desarrollo $\phi_{f_{MB}}^{x_i}(t_k, \tau)$, nuevamente se apilan las gráficas de cada función ordenadas por frecuencia característica para obtener la representación en **B3** (autocorrelograma). Se observa como existe una cresta que todas las componentes tienen presente, correspondiente al periodo dado por la frecuencia fundamental 200 Hz (línea vertical roja). Debajo del autocorrelograma, se observa una gráfica más pequeña titulada “*Summary ACF*” que se explica brevemente a continuación. Sumando cada abscisa del autocorrelograma se obtiene la función *summary autocorrelation function* (SACF) propuesta por Meddis y Hewitt. Usando los términos y conjuntos definidos hasta ahora, la función SACF se puede definir como

$$\text{SACF}_{t_k} : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}, \quad y \mapsto \text{SACF}_{t_k}(y) = \sum_{x_i \in P_{MB}} \phi_{f_{MB}}^{x_i}(t_k, y)$$

Dado que $\phi_{f_{MB}}^{x_i}(t_k, y)$ está bien definida y es continua para cada x_i , se tiene que SACF_{t_k} también está bien definida y es continua. Si la función SACF_{t_k} tiene un punto máximo, entonces ese punto corresponde a la coincidencia de todas las crestas de las funciones en C_k y por lo tanto es el periodo de la fundamental (línea vertical roja en **B3** y **C**), pues todas tienen un máximo en ese punto (Prop. 4.4.2). Esto último también se ve ejemplificado en la Figura 4.20 **C** de Cheveigné [54, Cap. 6], que es un autocorrelograma al igual que **B3**, con la diferencia de que se representa la magnitud de la ordenada de cada función con una escala de grises. **C** corresponde a la respuesta de un sonido compuesto por los armónicos 3, 5, 7 y 9, nuevamente de la frecuencia 200 Hz. En este caso la fundamental está ausente, sin embargo se muestra como hay una coincidencia unánime de puntos máximos únicamente en el punto que corresponde al periodo de la frecuencia fundamental $0.5 \text{ ms} = 0.005 \text{ s}$, de modo que $\frac{1}{0.005} = 200 \text{ Hz}$. Debajo del autocorrelograma en **C** también se encuentra la SACF que muestra el periodo correspondiente. Lo anterior asegura que, incluso si se sustrae la frecuencia fundamental, aún es posible deducirla a partir de los demás armónicos cuya frecuencia es múltiplo de la fundamental.

El objetivo es explicar la imagen auditiva de Lyon, por lo que no se mencionará más sobre estos modelos¹³, más detalles se pueden consultar en [54, Cap. 6] y [121, 122].

4.4.3. La imagen auditiva

La imagen auditiva, formalmente denominada “imagen auditiva estabilizada” (SAI - *stabilized auditory image*) asociada a una señal acústica f , es el resultado de el siguiente proceso: f es la entrada de un sistema compuesto por un conjunto de filtros acústicos no necesariamente lineales, que en conjunto buscan simular el comportamiento fisiológico de los primeros tres sectores del sistema auditivo, para posteriormente producir una salida de varias señales (representando las salidas de las fibras nerviosas auditivas) a las cuales se les aplica la función de autocorrelación de Licklider, para producir una sucesión de autocorrelogramas, los cuales forman la SAI.

Richard Lyon propone la SAI como un recurso más en el “análisis de escenas auditivas” y la “audición robótica”. La premisa u objetivo básico de estas últimas dos disciplinas es, dada una señal de audio (o conjunto de señales), realizar alguna de las siguientes tareas:

- (1) Saber dónde están las varias fuentes de sonido.
 - (2) Separar las fuentes en canales con sólo una fuente.
 - (3) Saber qué es cada una de esas fuentes y etiquetarlas.
 - (4) Filtrar el sonido de las fuentes etiquetadas “ruido”.
 - (5) Saber qué es lo que está diciendo cada una de las fuentes del tipo “persona”.
 - (6) Decidir cuál es la más importante “ponerle atención”.
 - (7) Comprender qué es lo que está diciendo la fuente más importante.
 - (8) Reaccionar a ruidos no esperados.
- ... en tiempo real, en ambientes muy dinámicos [123, p. 6].

Sin duda, de entre estas tareas, las más complejas de llevar a cabo son (3), (5) y (7), pues se está buscando extraer “significado” de una señal digital (muestreada) de audio, es decir, se pretende extraer el significado ¡de un conjunto de valores numéricos! En este punto el análisis de Fourier puede ser útil, pues si una señal de audio en el dominio tiempo no dice mucho respecto al contenido del mensaje, quizá en el dominio de la frecuencia sea más plausible encontrar alguna pista que ayude a dilucidar el mensaje en cuestión, sin embargo, el dominio de la frecuencia también tiene limitaciones como el principio de incertidumbre (mencionado inmediatamente después de la Obs. 2.4.8).

Máquinas capaces de entender el habla human existen en la actualidad: *Alexa* (Microsoft), *Siri* (Apple) o *Google Assistant*, todas estas utilizan “aprendizaje automático” (*machine learning*) y “redes neuronales artificiales” para poder operar [124, 125]. Llanamente, “el término aprendizaje automático se refiere a la detección automatizada de patrones significativos en los datos. En las últimas dos décadas se ha convertido en una herramienta común en casi cualquier tarea que requiera extracción de información de grandes conjuntos de datos” [126, p. xv]. Por otra parte, dentro del paradigma del aprendizaje profundo:

¹³Por ejemplo, respecto a su operatividad y efectividad, Schnupp y colegas llanamente aseguran que “la autocorrelación en su forma pura no es un mecanismo muy plausible para extraer la periodicidad por las neuronas” [3, p. 117].

Una red neuronal artificial es un modelo de computación inspirado en la estructura de las redes neuronales del cerebro. En los modelos simplificados del cerebro, éste se compone de una gran cantidad de dispositivos informáticos básicos (neuronas) que están conectados entre sí en una compleja red de comunicación, a través de la cual el cerebro es capaz de realizar cálculos muy complejos. Las redes neuronales artificiales son construcciones computacionales formales que se modelan según este paradigma computacional [126, p. 228].

Estos modelos requieren alimentarse de una gran cantidad de datos para poder “entrenar” y ser funcionales. En el contexto del análisis de audio, los datos son fragmentos de audio, en dominio tiempo, dominio frecuencia o alguna otra representación. Lo que propone Lyon, es entrenar los modelos de aprendizaje profundo mediante las imágenes auditivas, es decir, en vez de entrenar el modelo con una base de datos de ondas sonoras “crudas”, a estas se les realiza previamente un “pre-procesamiento” (correspondiente a la SAI), con la expectativa de obtener mejores resultados con el modelo.

Como ya se mencionó, la imagen auditiva está basada en los modelos de Jeffress y Licklider. Ya explicados estos últimos y teniendo en cuenta la exposición del proceso de audición en los primeros tres sectores, se pueden explicar las primeras dos capas del sistema de Lyon.

Simulación de la cóclea

Lyon le dedica gran parte de su obra a discutir los distintos modelos y métodos que han surgido para modelar la cóclea. Realiza una revisión de literatura sobre distintas propuestas que han surgido en las últimas décadas para los comportamientos Λ_4 , Λ_5 Λ_6 (Fig. 4.14), donde se dan reglas de correspondencia explícitas, respuestas al impulso o funciones de transferencia (si los comportamientos son lineales) para las funciones $\bar{\lambda}_4$, $\bar{\lambda}_5$ y $\bar{\lambda}_6$ en (4.10), (4.11) y (4.12). Lyon termina por elegir un conjunto de filtros (comportamientos), denominados CARFAC (*cascade of asymmetric resonators with fast-acting compression*) y ACG (*automatic gain control*), que primero simulan la respuesta de la membrana basilar ante un sonido, y después simulan la respuesta de las CCIs a la membrana. El modelo de la cóclea de Lyon descompone un sonido en 70 canales donde cada canal corresponde a la tonotopía de la MB y describe su movimiento dado por los filtros implementados. La respuesta de la MB da lugar a un cocleograma (un ejemplo de esta representación es la Figura 4.20 B1). Posteriormente se tiene la respuesta de las CCIs al cocleograma llamado NAP (*neural activity pattern*). Lo fundamental en esta primera etapa de procesamiento, es que una onda sonora incidente se transforma en 70 funciones, donde cada modelo la respuesta de cada conjunto de las CCIs y está determinada por el conjunto de filtros CARFAC y ACG.

Filtros gamma. Si bien escapa de los alcances de esta tesis entrar en los detalles de los sistemas planteados por Lyon, es pertinente mencionar el papel del llamado “banco de filtros de tono gamma (BFTG)” (*gamma-tone filter bank*), el cual busca modelar el movimiento de la MB¹⁴. En secciones anteriores se hizo énfasis en que la MB era la responsable en convertir las ondas sonoras generadas en la ventana oval en ondas mecánicas transversales en la membrana, y que a su vez la MB tiene una tonotopía, pero que se

¹⁴Una justificación del uso de estos filtros para modelar el movimiento de la MB se da en [3, Sec. 2.4].

desconocen los detalles de su respuesta a sonidos arbitrarios. Al margen de esto último, una aproximación preliminar y método vigente para modelar el movimiento de la MB ante sonidos arbitrarios, es el sistema BFTG, donde se considera la MB como un conjunto de sistemas LIT comunicados en cascada.

Un filtro de tono gamma con *frecuencia central* f_c , es un comportamiento de tiempo continuo (con $m = p = 1$) con respuesta al impulso:

$$K(t) = at^{n-1}e^{-2\pi bt} \cos(2\pi f_c t + \theta), \quad t \in \mathbb{R}_{>0}, \quad [127, \text{Ec. 1}] \quad (4.17)$$

donde $b \in \mathbb{R}_{>0}$ es un parámetro que determina la duración de la RI, $a \in \mathbb{R}_{>0}$ es una amplitud arbitraria, $n \in \mathbb{N}_{>0}$ se denomina el “orden” del filtro y θ es una fase arbitraria. Las

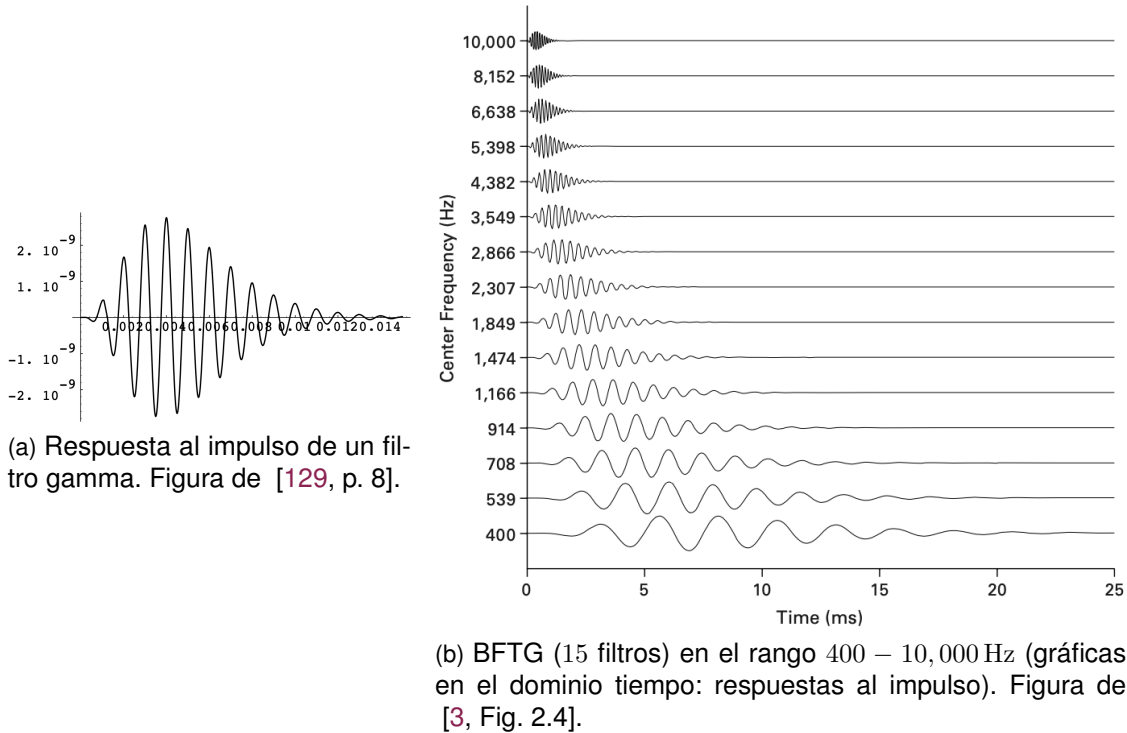


Figura 4.21: Gráficas de respuestas al impulso del sistema BFTG.

RI de los filtros gamma tienen la forma de una función sinusoidal con una “envolvente” con forma de una *función de densidad* gamma. En la Figura 4.21 (a) se muestra la gráfica de (4.17) para $f_c = 1000$, $n = 4$ y $b = 125$.

Patterson [127] menciona que para modelar la MB, un valor idóneo para b en función de f_c (con $n = 4$) es: $(1.019)ERB(f_c)$, donde $ERB(f_c) := 24.7 \left(\frac{4.37f_c}{1000} + 1 \right)$ (valor efectivo en frecuencias < 10 kHz). En este caso, el diagrama de Bode de la función de transferencia $\hat{K}$ (frecuencia vs. amplitud) toma las distintas formas que se muestran en la Figura 4.23. Se observa que cuando el filtro tiene frecuencia central baja, el rango de frecuencias que permite pasar es muy limitado, y a medida en que la frecuencia aumenta (junto con el valor b), el rango de frecuencias atenuadas disminuye.

La siguiente cuestión es como disponer un número finito de estos filtros a lo largo de la MB (o de un rango determinado de frecuencias). Por ejemplo, ¿cómo es que se

eligieron las frecuencias centrales de los 15 filtros mostrados en la Figura 4.21 (b) o en la Figura 4.23? En este punto entran en juego las llamadas “escalas de frecuencia auditiva” (*auditory frequency scales*), Lyon [23, Sec. 5.6] menciona que la forma general de estas escalas es

$$f_{\text{esc}}(f) = A \log_{10}(f/f_{\text{salto}} + 1), \quad f \in [10, \infty) \quad (4.18)$$

donde A es alguna constante de amplitud y f_{salto} es una frecuencia fija. La función inversa de (4.18) es $f_{\text{esc}}^{-1}(f) = f_{\text{salto}} \left(10^{\frac{f}{A}} - 1 \right)$.

Así como fue provechoso cambiar la escala de intensidad sonora a decibelios (§3.1.2), también lo es hacer un re-escalamiento de la frecuencia, mediante (4.18). Existen distintas maneras de re-escalar el rango de frecuencias audibles, por ejemplo:

1. para $A = 2595$ y $f_{\text{salto}} = 700$ se obtiene la escala “mel”.
2. Para $A = 21.4$ y $f_{\text{salto}} = 228.833$ se tiene la escala “ERB” (*equivalent rectangular bandwidth*) [128, Ec. 4], esta última es la usada para el sistema BFTG.
3. Para $A = \frac{1}{0.06}$ y $f_{\text{salto}} = 165.4$ se tiene la función $\frac{1}{0.06} \left(\log_{10} \left(\frac{f}{164.4} + 1 \right) \right)$, con inversa $f_{\text{esc}}^{-1}(f) = 165.4 \log_{10} \left(10^{0.06f} - 1 \right)$, que es la función de lugar vs. frecuencia de la MB de Greenwood mencionada en (4.9).

Por esto último, en la literatura se menciona que la escala ERB es esencialmente la escala lugar vs. frecuencia de la MB de Greenwood [127, 129].

El método seguido para construir un banco de filtros gamma es el siguiente: se elige un intervalo I de frecuencias audibles y un número k de filtros que se deseen usar, posteriormente se divide el intervalo I en $k - 1$ segmentos regulares en la escala ERB. De esta forma, cada punto P de la división del intervalo I en la escala ERB (o en la membrana basilar) tienen asignado un filtro gamma con $f_c = f_{\text{esc}}^{-1}(P)$, y $b = (1.019)ERB(f_c)$ con $n = 4$.

Como ejemplo, Schnupp y colegas consideraron el intervalo de 400 Hz a 10000 Hz y 15 filtros. La longitud del intervalo en la escala ERB es ≈ 25.9216 , que dividido en 14 partes iguales es ≈ 1.8516 . Con estos últimos datos, la Tabla 4.22 muestra la frecuencia central f_c idónea para cada filtro en todo el intervalo considerado. Primero se calcularon los valores regulares en la escala ERB con la fórmula $21.4 \log_{10} \left(\frac{400}{228.833} + 1 \right) + (k - 1)1.8516$, donde $k \in \{1, \dots, 15\}$ es el número del filtro. Posteriormente se convierte cada ERB a frecuencia mediante la función inversa $228.833 \left(10^{\frac{f}{21.4}} - 1 \right)$, de esta manera se obtienen las frecuencias centrales idóneas para los 15 filtros. La Figura 4.21 (b) muestra las gráficas de las RIs respectivas de los 15 filtros gamma.

# Filtro	Frecuencia central (en la escala ERB)	Frecuencia central idónea (Hz)
1	9.3949	400
2	11.2465	≈ 538.62
3	13.0981	≈ 707.82
4	14.9497	≈ 914.3158
5	16.8013	$\approx 1,166.33$
6	18.6529	$\approx 1,473.91$
7	20.5045	$\approx 1,849.29$
8	22.3561	$\approx 2,307.44$
9	24.2077	$\approx 2,866.58$
10	26.0593	$\approx 3,549$
11	27.9109	$\approx 4,381.86$
12	29.7625	$\approx 5,398.33$
13	31.6141	$\approx 6,638.89$
14	33.4657	$\approx 8,152.94$
15	35.3173	$\approx 10,000$

Figura 4.22: Valores idóneos para la frecuencia central de 15 filtros gamma dispuestos en el intervalo de frecuencias de 400 Hz a 10,000 Hz.

Por otra parte, en la Figura 4.23 se muestran las gráficas de un banco de 32 filtros gamma en el dominio de la frecuencia, esta vez el intervalo considerado es 50 a 8,000 Hz. La frecuencia central de cada filtro se determinó con el mismo método de la Tabla 4.22.

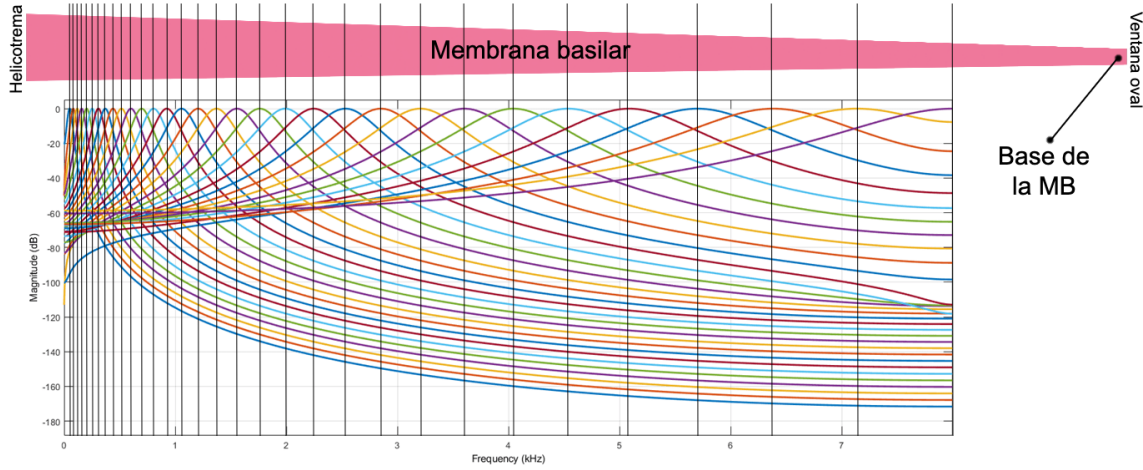


Figura 4.23: BFTG (32 filtros en el rango 50 – 8,000 Hz) y tonotopía respectiva de la MB. Gráficas en el dominio frecuencia: funciones de transferencia sinusoidal (frecuencia vs. amplitud), diagramas de bode o respuestas en frecuencia). Figura adaptada de mathworks.com.

Encima de la gráfica se posiciona la membrana basilar en vista superior, para ilustrar como la escala ERB es similar a la función lugar vs. frecuencia de Greenwood. La Fig. 4.23 se toma de la documentación del paquete *Audio Toolbox* para MATLAB, donde ya están implementados estos filtros. También es pertinente señalar la existencia del paquete *Auditory Modeling Toolbox* (amtoolbox.org) para MATLAB/OCTAVE, creado por el grupo ABBA¹⁵, donde se tienen implementados más modelos del sistema auditivo para la investigación en audición y procesamiento de audio, este paquete es reciente y aún sigue siendo actualizado [130].

Teniendo el conjunto de respuestas al impulso de filtros gamma $K_j(t)$ con $j \in \{1, \dots, n\}$ ordenadas de mayor a menor frecuencia (asociadas a algún intervalo de frecuencias), el sistema BFTG consiste en conectar los comportamientos en cascada, añadiendo una salida a cada comportamiento como se muestra en el diagrama de bloques en la Figura 4.24.

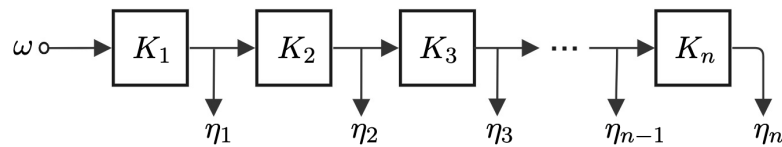


Figura 4.24: Diagrama de bloques del sistema BFTG, consiste en comportamientos conectados en cascada con salidas en cada transición a la siguiente RI. Las RIs se eligen con el método mostrado en la Tabla 4.22. Figura basada en [23, Fig. 12.9].

El sistema tiene n salidas, donde cada salida representa el movimiento de una parcela de la membrana basilar ante una onda sonora arbitraria ω ¹⁶. Si se apila la respuesta de

¹⁵Abba: *aural assessment by means of binaural algorithms*.

¹⁶Una animación del movimiento de la MB en respuesta a distintos sonidos basada en el sistema BFTG

cada comportamiento gamma de menor a mayor frecuencia se obtiene un cocleograma, que corresponde a las Figuras 4.15 (*Cochlea simulation*) o 4.20 B1.

Fotogramas y la SAI

Licklider supone en su modelo que la membrana basilar actúa de la misma manera que el teorema de Fourier, donde un sonido se descompone en suma de funciones sinusoidales generadas a lo largo de la membrana, sin embargo, por lo expuesto hasta ahora, este no es el caso (ver §4.2.1). A pesar de esto, la función ϕ_f de Licklider se puede aplicar a cualquier función f , continua con soporte compacto, Lyon aprovecha este hecho para construir la imagen auditiva.

Primero, una onda sonora $f(t) \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ entra al sistema de filtros CARFAC-ACG, así, $f(t)$ se transforma en las funciones $H_i(t) \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ con $i \in \{1, \dots, 70\}$, donde cada una describe las fluctuaciones de voltaje de una CCI. Aplicando la función de ACD a cada H_i se obtienen las funciones $\phi_{H_i}(t, \tau)$, con $i \in \{1, \dots, 70\}$. Luego, tomando el intervalo de tiempo de interés $I = [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$ del sonido que se desea analizar, considérese $P_I = \{t_0, x_1, \dots, t_1\}$ una partición regular del intervalo I , con $t_0 < x_1 < \dots < t_1$, así se puede definir el siguiente conjunto:

$$\text{SAI}_I^f := \{\mathcal{C}_{t_k} : t_k \in P_I\} \quad \text{con} \quad \mathcal{C}_{t_k} := \{\phi_{H_i}(t_k, \tau) : i \in \{1, \dots, 70\}\}, \quad (4.19)$$

donde $\phi_{H_i}(t, \tau) = \int_{\mathbb{R}_{>0}} H_i(t-T)H_i(t-\tau-T)w(T) dT$, es la función de ACD de Licklider en

(4.15) y w es una función exponencial decreciente. El conjunto SAI_I^f tiene por elementos un conjunto de autocorrelogramas por cada instante t_k , donde cada uno de estos último corresponden a los cortes $\phi_{H_i}(t_k, \tau)$ para cada $i \in \{1, \dots, 70\}$. La imagen auditiva de Lyon es la visualización de cada autocorrelograma $\mathcal{C}_{t_k}$ en orden, es decir, la imagen auditiva es considerar cada elemento $\mathcal{C}_{t_k} \in \text{SAI}_I^f$ como un fotograma (*frame*), y la imagen auditiva es la secuencia finita $(\mathcal{C}_{t_0}, \mathcal{C}_{x_1}, \dots, \mathcal{C}_{t_1})$.

4.5. Observaciones finales

Uno de los objetivos principales de este capítulo, fue evidenciar como se aplican conceptos de la teoría del control y sistemas LIT al proceso fisiológico de la audición. Esto último se ve reflejado (desde un punto de vista puramente teórico) en lo expuesto en la Tabla 4.2 y la Figura 4.14. Se buscó ir un poco más lejos, y evidenciar como la obra de Lyon ya busca llevar estos conceptos a la práctica (en el contexto de la audición robótica), y propone reglas de correspondencia explícitas para las funciones de salida planteadas en la Figura 4.14 (entre ellas el banco de filtros de tono gamma). Se dio una breve introducción al concepto de imagen auditiva y un bosquejo del sistema *machine hearing* desde el punto de vista matemático. El problema que Lyon ataca en su obra, es la implementación de todo el sistema descrito, esto va desde los filtros CARFAC-AGC, hasta el cálculo de la función ACD ϕ de Licklider, la aplicación binaural, para posteriormente realizar el tratamiento de la imagen auditiva $\text{SAI}_I^{s(t)}$ para realizar el análisis de la escena auditiva a través del aprendizaje profundo y los fotogramas de la SAI.

se puede ver en el sitio del libro de Schnupp y colegas: auditoryneuroscience.com/ear o bien en el material multimedia del libro Luis Colomer [80].

Capítulo 5

Localización en el SNCA e implementación de un modelo de HRTF para el plano horizontal



ON base en todo lo expuesto en capítulos anteriores, en este último capítulo se buscará exponer los aspectos más importantes de las pistas que el SNCA toma en cuenta para realizar la localización. También se otorgará una justificación fisiológica, para finalmente presentar un modelo HRTF para el plano horizontal implementado en MAXMSP.

5.1. Las pistas de la localización

Retomando lo mencionado en §1.1.1: la audición espacial es la habilidad que engloba al menos tres tareas efectuadas por el SNCA: (1) inferir la dirección al punto de origen de un sonido percibido (localización), (2) inferir la distancia al punto de origen de un sonido percibido (estimación de distancia) e (3) inferir características físicas del entorno donde se percibió el sonido (p.ej. tamaño y material de la habitación en la que se está). El SNCA realiza la localización usando las siguientes pistas: diferencias de tiempo interaurales (DTIs), diferencias de intensidad interaurales (DIIs) y patrones espectrales. Estas pistas se pueden clasificar en dos familias: *biaurales* y *monaurales*.

El proceso de audición descrito en el capítulo anterior ocurre dos veces y de forma independiente. Cuando el SNCA compara la información sonora enviada de ambos oídos para realizar la localización, se dice que está usando pistas biaurales, y si utiliza únicamente la información de un solo oído se habla de pistas monoaurales. La efectividad y generación de ambas pistas dependen principalmente de: a) las frecuencias que componen la onda sonora (espectro), b) la posición de la que se emite la onda sonora y c) las rasgos anatómicos de la persona que recibe las ondas sonoras (tamaño de la cabeza y torso, así como la forma particular de la oreja).

En un artículo dedicado a la revisión de la habilidad humana de inferir la distancia a una fuente sonora, Kolarik y colegas [5] mencionan que se puede distinguir entre el espacio “peripersonal” y el espacio “extrapersonal”, el primero se refiere a la zona comprendida por un metro alrededor la persona y el segundo a la zona que excede el metro. En el contexto de la audición espacial, un sonido es emitido en el espacio peripersonal si la fuente sonora

está a menos de un metro del origen en el SCRC. Se deben contrastar estas últimas definiciones con el concepto de campo cercano y campo lejano (ver §3.1.2). Ambos casos son similares, pero difieren en el punto de referencia, para el espacio peripersonal, el punto de referencia es el oyente y el espacio está delimitado por la esfera de radio 1 m con centro en el origen, mientras que, para el caso del campo cercano el punto de referencia es la fuente sonora, y se considera la esfera centrada en la posición de la fuente de radio igual a λ_m la longitud de onda del tono puro en cuestión (Fig. 3.6).

Brungart [82] dedica su tesis doctoral al estudio de la habilidad de localización para sonidos en el espacio peripersonal, en su tesis propone, para el contexto de la audición espacial, usar los términos “espacio peripersonal” y “campo cercano” como sinónimos. Es importante mencionar esto pues en la literatura es posible encontrar el término “campo cercano” (*near-field*) como sinónimo de espacio peripersonal (como hace Brungart) o por el contrario como el significado en el contexto de la acústica antes mencionado. Para frecuencias iguales a la velocidad del sonido (p.ej. un tono puro con frecuencia 344 Hz) se cumple que el espacio peripersonal es lo mismo que el campo cercano acústico, de lo anterior también se sigue que para frecuencias mayores a la velocidad del sonido, el espacio extrapersonal es lo mismo que el campo lejano. Por lo tanto, para la mayoría de las frecuencias audibles (frecuencias mayores a 344 Hz), el espacio extrapersonal es equivalente al campo lejano.

Los datos y experimentos psicoacústicos de diversos otros trabajos que se describen a continuación fueron seleccionados por su relevancia al tema principal de este escrito. Cabe mencionar que fueron realizados en una cámara anecóica (campo libre) con una fuente de sonido que dista a más de un metro del sujeto de pruebas (espacio extrapersonal - campo lejano).

5.1.1. Pistas biaurales: DTI y DII

Se considera el siguiente escenario.

Escenario A. Se emite una onda sonora desde un punto localizado en el plano horizontal, a la izquierda del plano sagital a más de un metro de una persona. Como referencia se toma la Figura 5.1.

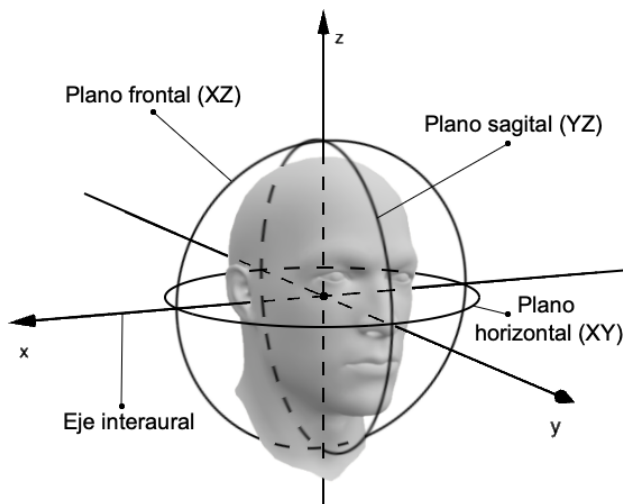


Figura 5.1: Planos anatómicos respecto al sistema de coordenadas referido a la cabeza (SCRC). Edición sobre modelo 3D “Human Head” de Vista Prime.

La diferencia de intensidad interaural (DII)

La pista DII consiste en asociar la diferencia de intensidad (medida en decibelios - dB) de las dos ondas sonoras que llegan a cada oído con una dirección determinada. Esta pista ocurre principalmente por los fenómenos acústicos de reflexión y difracción. Considerando el **Escenario A**, ocurre que la cabeza (el torso y los hombros también pueden influir), al ser un medio más denso que el medio de propagación del sonido, obstaculiza el sonido proveniente del lado izquierdo creando una sombra acústica, así, la onda sonora que llega al oído izquierdo es reflejada y difractada alterando la intensidad de la onda que llega al oído derecho [7, Cap. 2]. Dependiendo de la composición espectral del sonido en cuestión, puede que la onda sea reflejada y absorbida por la cabeza, en tal caso la onda sonora que llega al oído izquierdo tiene mayor intensidad (amplitud) que la del oído derecho. Por otra parte, debido a la difracción (capacidad del sonido de rodear un obstáculo con poca o nula alteración en su amplitud), puede ocurrir que la onda sonora sea transmitida al oído derecho con su amplitud casi intacta.

Considerando un tono puro, y tomando en cuenta que la difracción ocurre si la longitud de onda del tono es mayor o similar a las dimensiones de un obstáculo, a medida en que la longitud de onda se acerca a la distancia interaural (distancia entre ambos oídos), el fenómeno de difracción se hace más presente. En contraste, a medida que la longitud de onda es menor que la distancia interaural, existe menor difracción y solamente cuentan los fenómenos de absorción y reflexión del sonido.

Usando la relación de longitud de onda discutida en §3.1.2: $\lambda = \frac{v_0}{f}$, donde f es la frecuencia del tono puro y v_0 la velocidad del sonido en m/s, se obtiene la función $f_\lambda(x) = \frac{v_0(100)}{x}$ que describe la longitud de onda en cm/s de una frecuencia x dada.

En la Figura 5.2 se tiene la gráfica de la función $f_\lambda(x)$ considerando $v_0 = 344$ m/s. La gráfica sugiere que las pistas DIIs son más significativas para frecuencias altas cuya longitud de onda es menor que la distancia interaural, mientras que las frecuencias cuya longitud de onda es mayor a la distancia interaural no producen una DII significativa. Por ejemplo, tomando 23 cm como la distancia interaural, dado que $f_\lambda(1500) = 22.93...$, se puede sugerir que las frecuencias > 1.5 kHz producen DIIs significativas. En efecto, un tono puro de 200 Hz crea DIIs menores a 2 dB [9], o un tono de 700 Hz crea una DII de entre 5 dB y 10 dB para la mayoría de las direcciones [3, Fig. 5.2], por lo que en ambos casos las diferencias son negligibles o poco informativas para el SNCA. Mientras que, para determinadas direcciones, un tono de 11 kHz creará una DII de hasta 40 dB [3, Fig. 5.2], esta diferencia es mucho más significativa y es una buena pista que el SNCA detecta para realizar la localización.

El consenso actual basado en estudios psicoacústicos es que las DIIs son significativas para frecuencias > 4 kHz (de acuerdo a Middlebrooks [52]) o > 3 kHz (de acuerdo a

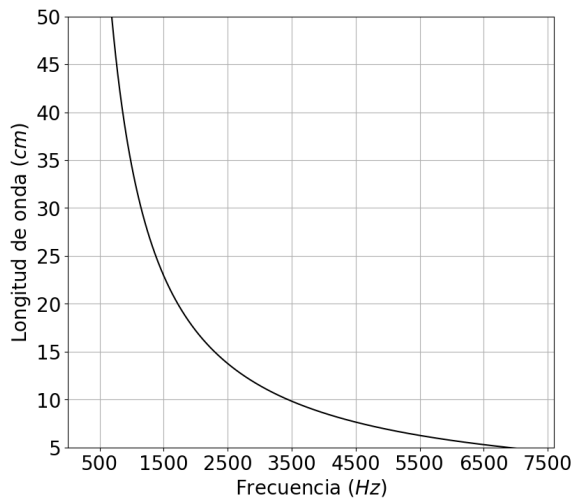


Figura 5.2: Frecuencia vs. longitud de onda en cm. Gráfica de la función $f_\lambda(x) = \frac{34400}{x}$, donde $f_\lambda(x)$ es la longitud de onda en centímetros de la frecuencia x .

Schnupp y colegas [3, Cap. 5])¹. Esto se debe a que existen otros factores que determinan una DII, como la reflexión de ondas por el torso y la resonancia de las orejas que alteran la intensidad de una onda sonora para determinadas frecuencias y direcciones², esto último complica el comportamiento de las pistas de DII.

La diferencia de tiempo interaural (DTI)

La pista DTI consiste en asociar la diferencia de tiempo (medida en microsegundos - μs) de ambas ondas sonoras que llegan a cada oído con una dirección determinada. Nuevamente considerando el **Escenario A**, debido a la separación entre ambos oídos la onda sonora llegará primero al oído izquierdo que al derecho, creando así la DTI. Cuando el sonido en cuestión es un tono puro (o una onda periódica), es más preciso denominar a las DTI como diferencia de fase interaural (DFI). En contraste con las DIIs, las DTIs son útiles únicamente para frecuencias bajas (< 1400 Hz [52] o < 1600 Hz [3, Cap. 5]). La explicación de este hecho no es tan inmediata (en comparación con las DIIs). El primer factor que explica la cota superior para las DTIs es que, para frecuencias altas (> 2000 Hz) se ha observado que “la relación entre el acimut y la DTI no depende fuertemente de la frecuencia, estos límites implican que, en gran parte del campo auditivo que rodea a un oyente, la DTI de alta frecuencia sería completamente no informativa” [9, pp. 388-389]. Aunado a lo anterior, se tienen dos hechos importante respecto a las DTIs.

DTI máxima. La mayor DTIs posible (para frecuencias bajas) se encuentra entre $600 \mu s$ y $1000 \mu s = 1$ ms y está asociada a un sonido *completamente lateralizado*, es decir, un sonido emitido en un punto del eje interaural. Blauert maneja una DTI máxima de $630 \mu s$, valor determinado por estudios psicoacústicos [6, Sec. 2.4], por otra parte también es posible obtener un valor máximo para una DTI a través de un modelo geométrico que considera la cabeza humana como una esfera o un elipsoide, Lyon [23, Cap. 22] menciona una DTI máxima cercana a 1 ms, Schnupp y colegas reportan un valor máximo de alrededor de $700 \mu s$ [3, Cap. 5], Stecker y Gallun [9] únicamente mencionan que se trata de un valor arriba de $600 \mu s$, Culling y Akeroyd aseguran que la máxima DTI es $650 \mu s$ [1], mientras que Tollin y Yin aseguran que la máxima es de alrededor de $800 \mu s$ [14]. Todos estos valores dependen del modelo usado (parámetros anatómicos), las dimensiones de la cabeza considerados y la velocidad del sonido.

Ambigüedad en las DFIs. Al estudiar las diferencias de fase de un tono puro, existen dos posibles valores que el SNCA puede tomar en cuenta para inferir la localización de una fuente sonora. En la Figura 5.3 se tienen dos tonos puros: $f_1(t) = A \sin(2\pi\phi_0 t)$ y $f_2(t) = A \sin(2\pi\phi_0(t + c_0))$ ambos con una misma frecuencia ϕ_0 , amplitud $A \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ pero desfasados $c_0 \mu s$ con $0 < c_0 \leq M_{DTI}$ donde M_{DTI} es el valor máximo posible de una DTI. Las flechas señalan los dos posibles valores para las DFIs dependiendo de si se considera como referencia el tono f_1 o el tono f_2 . Tomar como referencia f_1 corresponde a la distancia c_0 (el desfase) y tomar como referencia f_2 corresponde a la distancia d_0 que es

¹Vale la pena notar que estas cotas inferiores corresponden a la longitud de onda de 8.6 cm y 11.46... cm respectivamente, valores que se aproximan a la mitad de la distancia interaural (alrededor de 22 cm).

²En este sentido las pistas DII están estrechamente relacionadas con las pistas monaurales como se verá más adelante.

la distancia de la primera cresta³ del tono f_2 a la segunda cresta del tono f_1 . Suponiendo que el **Escenario A** es el asociado a la Figura 5.3, se tendría que f_1 corresponde a la señal recibida en el oído izquierdo y es la que llega primero al SNCA, de modo que la interpretación correcta es la que toma en cuenta c_0 pues f_1 “lidera” (*lead*) y f_2 es el tono que está “atrasado” (*lag*). Elegir el valor d_0 como la DFI significaría que el sonido llegó primero al oído derecho de modo que f_2 lidera y f_1 está atrasado, de esta forma el sonido sería interpretado como proveniente del lado derecho del plano sagital, lo cual no corresponde al escenario supuesto.

Ante esta ambigüedad para la fase, pueden ocurrir tres posibles resultados: 1. se perciben dos sonidos viniendo de las dos direcciones asociadas a c_0 y d_0 , 2. se percibe una sola dirección de alguna de las dos y 3. se percibe un sonido sin ser lateralizado (viniendo del frente) [6, Sec. 2.4.1]. Los estudios psicoacústicos sugieren que en la mayoría de los casos se elige el menor valor [9], de modo que “la diferencia de tiempo interaural más corta, domina con respecto a la otra” [6, p. 147]. El SNCA elige el valor $\min\{c_0, d_0\}$ para determinar la DTI, y dado que la correcta interpretación es la que toma en cuenta c_0 , se sigue que

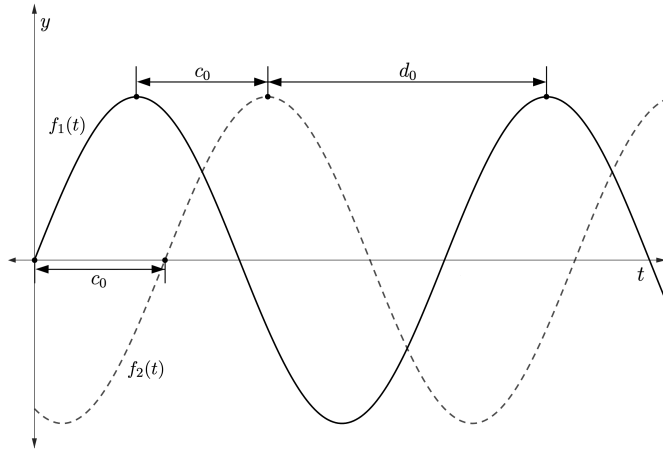


Figura 5.3: Los dos posibles valores de una DFI. Se tienen dos tonos puros $f_1(t)$ (línea sólida) y $f_2(t)$ (línea punteada), ambos con la misma frecuencia pero desfasados $c_0 \mu\text{s}$. Los dos posibles valores que el SNCA puede tomar en cuenta como DFI son c_0 o d_0 .

lo mínimo necesario para una correcta interpretación es pedir que $c_0 < d_0$. Esto último determina una cota superior para las frecuencias válidas para pistas de DTI mediante la función $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f_M(x) = \frac{10^6}{2x}$ y obtenida de la siguiente forma:

$$0 < c_0 < d_0 \iff 0 < 2c_0 < c_0 + d_0 \quad (\text{periodo en miliseg.})$$

$$\iff 0 < \frac{2c_0}{10^6} < \frac{c_0 + d_0}{10^6} \quad (\text{periodo en seg.})$$

$$\iff \frac{10^6}{2c_0} > \frac{10^6}{c_0 + d_0} \quad (\text{el inv. mult. del periodo es la frecuencia}).$$

En particular, si $c_0 = M_{DTI}$, solo un reducido rango de frecuencias son candidatas a ser interpretadas como lateralizadas por completo, y a medida que c_0 disminuye, el rango de frecuencias válidas para una DTI aumenta, pero se pierde la posibilidad de percibir valores laterales o existe ambigüedad al hacerlo (ver Figura 5.4). Por ejemplo, usando el valor $M_{DTI} = 630 \mu\text{s}$ se tiene que $f_M(630) = 793.6507\dots$, así, Blauert menciona que: “a medida que la frecuencia se eleva por encima de 800 Hz, el desplazamiento máximo alcanzable se vuelve cada vez más pequeño” [6, p. 148].

³El punto de referencia puede no ser la cresta del tono puro (ver [6, Fig. 2.71]), sin embargo se usan estos puntos para enfatizar la relación entre el fenómeno de las DTIs y el fenómeno de *phase-locking* discutido en la sección anterior.

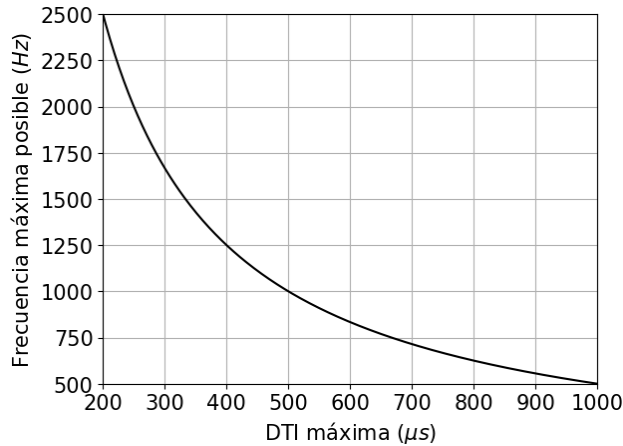


Figura 5.4: Gráfica de $f_M(x) = \frac{10^6}{2x}$ para $200 \leq x \leq 1000$. $f_M(x)$ es la frecuencia máxima que se puede percibir (con menor riesgo de ambigüedad) en lateralización total respecto a la DTI máxima x .

La teoría *duplex* de la localización biaural de Rayleigh y las deficiencias de las pistas biaurales

Rayleigh realizó trabajos importantes sobre acústica e investigó la propagación del sonido en campo libre y la habilidad humana de localización en el plano horizontal. Lo anterior con el objetivo de aplicar sus descubrimientos a la navegación marítima, esto fue entre finales del siglo XIX y principios del XX, cuando el medio principal de comunicación era la megafonía [2, Cap. 2] (ver §1.1.1). Este físico fue el primero en postular que las DTIs y las DIIIs son usadas para localizar frecuencias bajas y altas respectivamente, a su teoría (actualmente aceptada bajo los rangos antes mencionados y respaldada por numerables experimentos [52]) se le conoce como la teoría “duplex” de la localización biaural. Sin embargo, las pistas de DII y DTI no son suficientes para realizar la localización satisfactoriamente por las siguientes razones:

1. de acuerdo a lo mencionado hasta ahora, los tonos que se encuentren en el rango de 1.6 kHz a 3 kHz no producen DTIs o DIIIs significativas. En efecto, se cometen errores al localizar tonos cercanos a los 3 kHz emitidos en el plano horizontal [52],
2. las pistas baurales solamente dan información significativa del ángulo horizontal (θ en el SCRC) de procedencia de un sonido y dicen poco (o nada) respecto a la altitud (ϕ), y por último,
3. una única DTI (o DII) no determina una única dirección, es decir, existe una infinidad de direcciones distintas que poseen una única DTI y DII asociada, a este fenómeno se le conoce como “conos de la confusión”, pues un valor de una pista baural no está asociada a una dirección sino a un “cono de direcciones” [9], este fenómeno puede exacerbar los errores en la localización hasta el punto de confundir sonidos provenientes de la espalda con el frente o de arriba con debajo etc. [1].

Por otra parte, si el interés es simular la localización, presentar únicamente los estímulos de DTI y de DII (por medio de auriculares, por ejemplo) únicamente producirán la sensación de un sonido proveniente del interior de la cabeza y lateralizado [3, Cap. 5], la sensación de un sonido con procedencia del exterior es gracias a la pistas monaurales que se abordarán en breve.

Los conos de la confusión. El cono de la confusión para una pista de DTI se puede aproximar tomando en cuenta que las DTIs no dependen fuertemente de la distancia desde donde se emite un sonido [10], sino de la dirección de procedencia, entonces se utiliza un modelo que considera la cabeza humana como una esfera en el SCRC y se determina el cono de la confusión a partir de relaciones puramente geométricas y considerando la cabeza humana como una esfera con centro en el origen.

Considérense los puntos $\hat{a}, \hat{x}_l, \hat{x}_r \in \mathbb{R}^3$ en el SCRC donde $\hat{a} = (a, b, c)$ representa la posición donde se emite un tono puro con frecuencia ϕ_0 , $\hat{x}_l = (x_l, 0, 0)$ es el punto donde se localiza la entrada del canal auditivo externo izquierdo y $\hat{x}_r = (x_r, 0, 0)$ el derecho. Esta configuración dará lugar a una DTI (asociada al punto $\hat{a}$). Se parte del supuesto de que si existe un punto $\hat{x} \in \mathbb{R}^3$ tal que $d(\hat{x}, \hat{x}_l) = d(\hat{a}, \hat{x}_l)$ y $d(\hat{x}, \hat{x}_r) = d(\hat{a}, \hat{x}_r)$ entonces la DTI asociada al punto $\hat{x}$ será la misma que la asociada al punto $\hat{a}$ [3, Cap. 5]. El conjunto de puntos $\hat{x} \in \mathbb{R}^3$ que cumplen la propiedad de $d(\hat{x}, \hat{x}_l) = d(\hat{a}, \hat{x}_l)$ y $d(\hat{x}, \hat{x}_r) = d(\hat{a}, \hat{x}_r)$ es el círculo en el plano $x = a$ con centro en $(a, 0, 0)$ y radio $\sqrt{b^2 + c^2}$, es decir, se asegura que

$$\{\hat{x} \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 + z^2 = b^2 + c^2, x = a\} = \{\hat{x} \in \mathbb{R}^3 \mid d(\hat{x}, \hat{x}_l) = d(\hat{a}, \hat{x}_l) \text{ y } d(\hat{x}, \hat{x}_r) = d(\hat{a}, \hat{x}_r)\} \quad (5.1)$$

La justificación de (5.1) se puede consultar en la Prop. A.2.13 en la página 192. Por tanto, todo valor de DTI puede provenir de un círculo el cuál se genera al rotar el punto de la fuente alrededor del eje interaural, y como la pista de DTI no depende fuertemente de la distancia entre la fuente sonora y el receptor, se considera todo el cono con vértice en el origen que contiene al círculo antes mencionado.

El cono de la confusión para una pista de DII es mucho más complejo, pues como se mencionó antes, las DII dependen fuertemente de la frecuencia y dirección desde donde se emite el sonido, por lo que para cada frecuencia f_0 y cada dirección (θ, ϕ) se tiene un complejo patrón donde ciertas direcciones poseen mismas DII (como referencia ver [3, Fig. 5.2]).

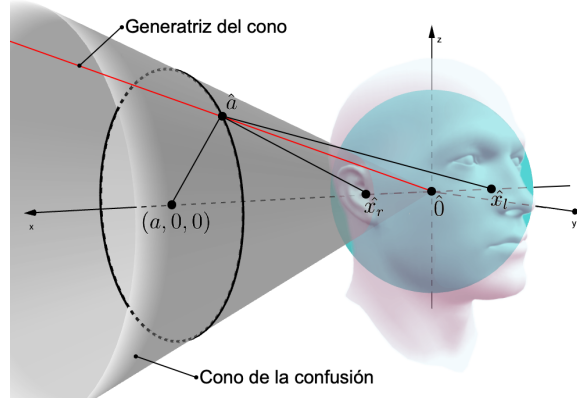


Figura 5.5: Cono de la confusión para una DTI con el modelo esférico. Edición sobre modelo 3D “Human Head” de Vista Prime.

Beats biaurales o pulsos biaurales. Vale la pena dedicarle un apartado al fenómeno psicoacústico conocido como *beat* biaural⁴ o pulso biaural, pues está muy ligado a la pista de localización de DTI y ocurre cuando de manera simultánea y aislada se escuchan dos tonos puros que difieren en frecuencia por unos cuantos hercios. Los mejores resultados son cuando la diferencia es menor a 5 Hz y se pierde el efecto cuando la diferencia es mayor a 20 Hz [1]. Tal estímulo produce la ilusión auditiva de que el sondo (ambos tonos puros combinados) se mueve en el plano horizontal, es decir se percibe el sonido como

⁴Es común el uso del término “binaural” (palabra tomada de manera directa del inglés), que biaural. En esta tesis solamente se usa el término biaural.

si la dirección de procedencia θ en el SCRC fluctuase entre los valores $\frac{\pi}{2}$ y $-\frac{\pi}{2}$. Rayleigh argumentó que esto se debe a que ambos tonos producen una serie de pistas de DFIs con variación continua por lo que esto es interpretado por el SNCA como un sonido moviéndose en el plano horizontal, más aún, debido a que la ilusión de los pulsos biaurales solo es efectiva para frecuencias < 1.6 kHz, Rayleigh se apoyó en este hecho para justificar que solamente frecuencias bajo ese rango son efectivas para una pistas de DTI, y esto último funcionó como argumento para su teoría duplex [3, Cap. 5] mencionada párrafos arriba.

Para explicar el por qué del efecto psicoacústico de un pulso biaural, considérense los tonos $f_1(t) = A \sin(2\pi\phi_0 t)$ y $f_2(t) = A \sin(2\pi(\phi_0 + c_0)t)$, ambos con amplitud A que difieren en frecuencia $c_0 \in (0, 5] \subseteq \mathbb{R}$ hercios y ϕ_0 arbitraria. Sea $k \in \mathbb{N}$ fijo. La cresta de f_1 en el intervalo $\left[\frac{k}{\phi_0}, \frac{k+1}{\phi_0}\right] \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$ es el punto $\left(\frac{k}{\phi_0} + \frac{1}{4\phi_0}, f_1\left(\frac{k}{\phi_0} + \frac{1}{4\phi_0}\right)\right) = \left(\frac{k}{\phi_0} + \frac{1}{4\phi_0}, A\right)$. Análogamente, la cresta de f_2 en el intervalo $\left[\frac{k}{\phi_0 + c_0}, \frac{k+1}{\phi_0 + c_0}\right]$ es el punto $\left(\frac{k}{\phi_0 + c_0} + \frac{1}{4(\phi_0 + c_0)}, A\right)$. La distancia temporal entre crestas de ambos tonos para el intervalo $\left[\frac{k}{\phi_0 + c_0}, \frac{k+1}{\phi_0 + c_0}\right]$ y $\left[\frac{k}{\phi_0}, \frac{k+1}{\phi_0}\right]$ está dada por la función $h(k) = \frac{4kc_0 + c_0}{4\phi_0(\phi_0 + c_0)}$ ⁵ (en segundos). A medida que k incrementa $h(k)$ incrementa sin cota superior, en particular cuando $k \geq \phi_0$ ocurre que $\left(\frac{k}{\phi_0 + c_0}, \frac{k+1}{\phi_0 + c_0}\right) \cap \left(\frac{k}{\phi_0}, \frac{k+1}{\phi_0}\right) = \emptyset$, sin embargo, la DFI tiene una cota superior y está dada por la mitad del periodo de la frecuencia más baja, es decir, $1/(2\phi_0)$ (en segundos) ya que si se excede este valor, se tomará el valor menor complementario (ver Fig. 5.3 y lo discutido en la sección dedicada a la ambigüedad de las DFIs), entonces se debe pedir que $\frac{4kc_0 + c_0}{4\phi_0(\phi_0 + c_0)} \leq \frac{1}{2\phi_0} \iff k \leq \frac{2(\phi_0 + c_0) - c_0}{4c_0}$. De esta forma ambos tonos producen ininterrumpidamente DFIs que se encuentran entre los valores $h(0) = \frac{c_0}{4\phi_0(\phi_0 + c_0)}$ y $h\left(\frac{2(\phi_0 + c_0) - c_0}{4c_0}\right) = \frac{1}{2\phi_0}$.

Los patrones que presentan ambos tonos puros dependen de la frecuencia ϕ_0 y el valor c_0 , pero se repiten cada segundo (pues cada segundo ambas frecuencias cumplen sus ciclos y se reinicia el patrón), dado que el tono f_1 y f_2 son percibidos aisladamente en cada oído, el SNCA es bombardeado constantemente por esta secuencia incesante de DFIs que produce la ilusión acústica del movimiento en el plano horizontal. Por otra parte, se debe pedir que $h(k) < M_{DTI}$ (máxima DTI) para cualquier k tal que $h(k) < \frac{1}{2\phi_0}$, pues si se excede la máxima DTI, puede que el efecto de lateralización se pierda [1]. Considerando $M_{DTI} = 0.001$ s = 1 ms se debe pedir que $\frac{1}{2\phi_0} < 0.001$ si y solo si $\phi_0 > 500$. Por lo tanto, la ilusión acústica que produce el pulso biaural es más efectiva para frecuencias mayores a 500Hz (por tanto el efecto de DTIs de un *beat* biaural es mejor para frecuencias entre 500 y 1600 hercios).

Como ejemplo⁶, en la Figura 5.7 (a) se tiene la gráfica de los tonos $f_1(t) = \sin(2\pi(30)t)$

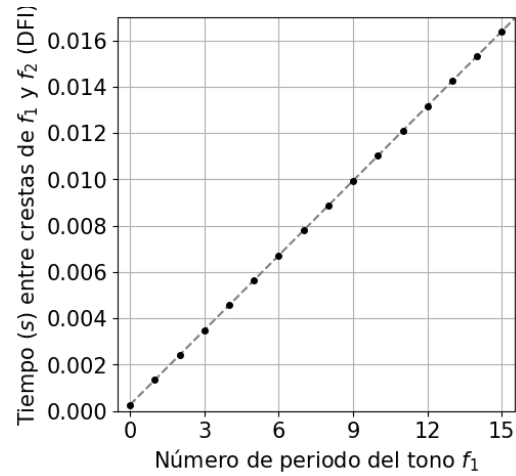


Figura 5.6: Gráfica de $h(k) = \frac{4k+1}{4(30)(30+1)}$ para $k \in \{0, 1, \dots, 15\}$.

⁵ $h(k)$ está construida para que su dominio sea $\mathbb{N}$ sin embargo se considera $h(k)$ con dominio $\mathbb{R}_{\geq 0}$ para pensarla como una recta.

⁶El ejemplo es puramente ilustrativo, pues en este caso las DTIs producidas exceden la máxima DTI natural posible (1 ms), por lo que la ilusión acústica sería poco efectiva, se usó una frecuencia extremadamente baja

y $f_2(t) = \sin(2\pi(31)t)$ a lo largo de un segundo. En la Figura 5.7 (b) se observa mejor cómo la distancia entre crestas crece a medida que pasa el tiempo, pero cuando se llega a 0.5 s existe una DFI menor, que es la que tendrá preferencia al interpretar la localización.

En la Figura 5.6 se tiene la gráfica de la función $h(k) = \frac{4k+1}{4(30)(30+1)}$ (limitando el dominio para $k \in \{0, 1, 2, \dots, 15\}$) que muestra las distancias entre crestas (DFIs) en los ciclos (intervalos) $[\frac{k}{30}, \frac{k+1}{30}]$ y $[\frac{k}{31}, \frac{k+1}{31}]$. Se toman únicamente 15 ciclos ya que $h(15) = 0.01639\dots$ y este valor se aproxima a la máxima DFI posible que en este caso es $0.01\bar{6}$ s.

Para finalizar sobre los pulsos biaurales, solamente se menciona que estos también producen una modulación de la amplitud (de ahí que sean “pulsos” o *beats*), la frecuencia de esta modulación nuevamente depende del valor c_0 , y presupone que los sonidos que llegan a cada oído son sumados, es decir, tomando en cuenta el caso de la Figura 5.7 (a), se presupone que si $f_1(t)$ se escucha de manera aislada en el oído izquierdo y $f_2(t)$ en derecho, entonces el sonido que se termina por “percibir” es la suma $C(f_1(t) + f_2(t))$ donde $0 < C \leq 1$ es algún factor de compresión (Fig. 5.7 (c)).

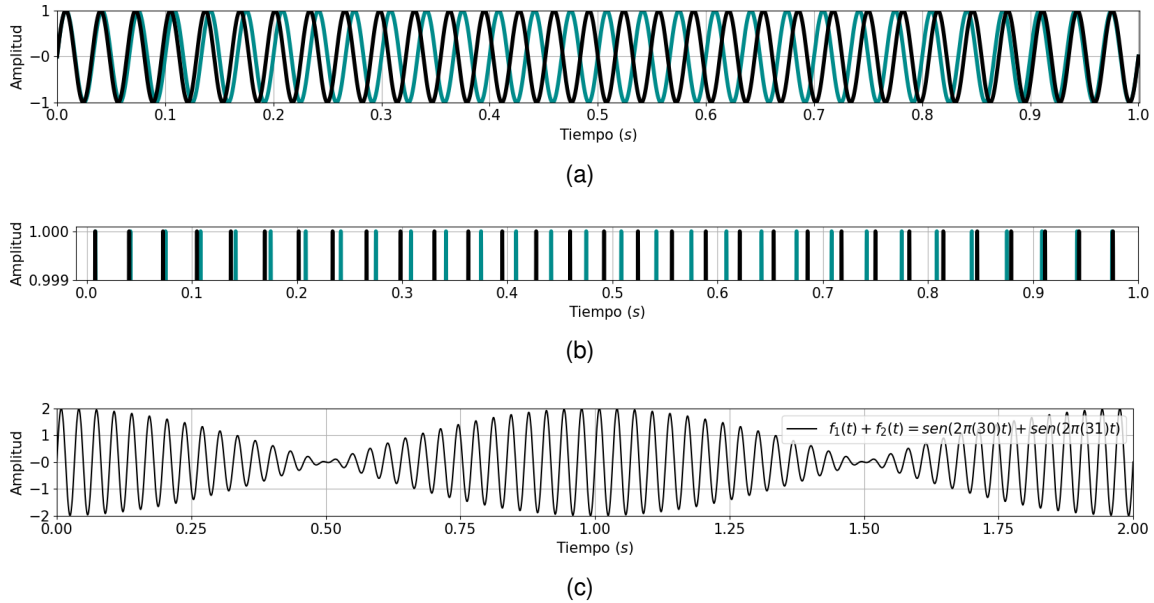


Figura 5.7: (a) Pulso biaural para una frecuencia de 30 Hz y 31Hz. Gráfica de los tonos $f_1(t) = \sin(2\pi(30)t)$ (azul) y $f_2(t) = \sin(2\pi(31)t)$ (negro) para $t \in [0, 1]$. (b) Exageración de las crestas de las gráficas $f_1(t)$ y $f_2(t)$. (c) Gráfica de la función $f_1(t) + f_2(t) = \sin(2\pi(30)t) + \sin(2\pi(31)t)$ para $t \in [0, 2]$. (Python)

5.1.2. Pistas monaurales o espectrales

En §1.1.1 se mencionó como el ser humano puede reconocer cambios en θ (en el SCRC) tan pequeños como 1° y cambios en ϕ tan pequeños como 2° [9]. Si las pistas biaurales no influyen significativamente en el reconocimiento de ϕ de un sonido percibido, debe haber otra pista que proporcione esta información. Las pistas monaurales completan la habilidad de localización y son las pistas principales que el SNCA utiliza para determinar la elevación y resolver las confusiones del tipo frente-espalda o arriba-abajo

para que se pueda apreciar la distancia entre crestas.

(causadas por los conos de la confusión) [9]. Son monaurales ya que están determinadas por la interacción del sonido con un oído, esto se ve reflejado en que personas con sordera en un solo oído son capaces de localizar sonidos de manera satisfactoria (casi tan bien como oyentes normales) [52], sin embargo, existen estudios que muestran que el SNCA puede comparar ambos patrones espectrales para realizar la localización [3, Cap. 5], en este sentido las pistas monaurales también pueden considerarse pistas binaurales, a este fenómeno Tomasz Letowski y Szymon Letowski le llaman *diferencias de espectro interaurales* [131, Sec. 2.2].

Las pistas monaurales se generan debido a la interacción de las ondas sonoras con el torso, cabeza y principalmente la oreja, que en conjunto alteran el espectro de Fourier de una onda sonora en función de su ángulo de incidencia. La oreja, junto con el canal auditivo externo forman un sistema complejo de resonancias y anti-resonancias que generan alteraciones en forma de crestas y valles del espectro de Fourier de un sonido incidente. Tales alteraciones comienzan a manifestarse a partir de los 3 kHz [6, Sec. 2.2], aunque las alteraciones causadas por la cabeza y el torso también pueden influir en frecuencias menores a 3 kHz [132].

Las alteraciones espectrales se hacen evidentes con la función de transferencia referida a la cabeza discutida en §3.3, la HRTF está compuesta por dos funciones de transferencia, a cada una de estas se le puede llamar *función de transferencia direccional* (FTD), a través de estas se puede analizar el comportamiento de la alteración espectral monaural en función del ángulo de incidencia de un sonido⁷. Por ejemplo, en las FTDs de un gato⁸ se presentan valles en frecuencias bajas para elevaciones bajas y a medida que la elevación aumenta, los valles aumentan su posición en el dominio de la frecuencia [14]. Para el caso del ser humano aún no se conoce la relación específica entre el patrón espectral y la dirección del sonido, pues como ya se mencionó, estos patrones son particulares para cada persona. Al margen de lo anterior, se sabe que ciertos valles o crestas en determinados intervalos de frecuencias están asociados a identificar áreas o resolver determinadas confusiones asociadas al cono de la confusión, en la Tabla 5.1 se mencionan tales relaciones.

Rango de frecuencias (kHz)	4 – 16	6 – 12	4 – 8	7 – 9	10 – 12
Competencia	Rango donde se encuentran alteraciones que resuelven confusiones de tipo frente-espalda	Rango donde se encuentran alteraciones que resuelven confusiones del tipo arriba-abajo	Primer valle o N1 (<i>notch 1</i>), asociado con un sonido proveniente del frente	Primera cresta o P1 (<i>peak 1</i>), asociada con sonidos provenientes de arriba de la cabeza	Segunda cresta o P2, asociada con sonidos provenientes de la espalda

Tabla 5.1: Aspectos generales sobre las pistas monaurales. Tabla realizada con la información de Tomasz Letowski y Szymon Letowski [131, Sec. 2.2].

Si bien la Tabla 5.1 tiene identificadas algunas alteraciones y su competencia, no siem-

⁷En el campo lejano, la HRTF no es fuertemente dependiente de la distancia al origen del SCRC, por lo que la dirección es el parámetro más relevante a tener en cuenta.

⁸Para el caso del gato se tiene conocimiento satisfactorio de la relación entre el ángulo de procedencia de un sonido y el patrón de valles y crestas asociado [3, Cap. 5].

pre son evidentes tales alteraciones, por ejemplo, en la Figura 5.8 (a) se tiene la comparación de dos FTDs para los oídos derechos de dos sujetos de prueba capturadas al frente en distintas alturas del plano sagital, en la elevación $\phi = 0^\circ$ el sujeto de pruebas de la derecha (S07) presenta el primer valle (N1) pero en el sujeto de la izquierda (S35) no se presenta o al menos no es evidente cuál es el valle N1. Para el caso de distintas alturas de la espalda en el plano sagital (Figura 5.8 (b)) también hay diferencias aunque el símbolo “*” señala la segunda cresta (P2) mencionada en en la Tabla 5.1.

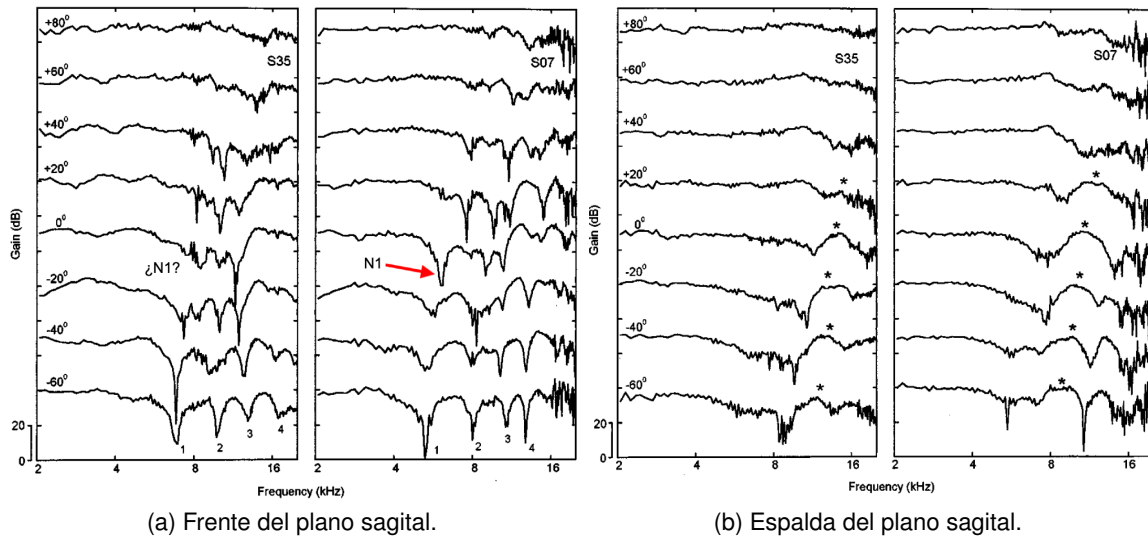


Figura 5.8: Comparación de las FTDs de dos personas (oídos derechos), para el frente y espalda del plano sagital. A la izquierda se encuentran la FTD del sujeto S32 y a la derecha la del sujeto S07. El dominio es la frecuencia en kHz, el codominio la amplitud en dB. Se apilaron las FTDs en función del ángulo ϕ de elevación. Se pueden observar rasgos que se mencionan en la Tabla 5.1, aunque no siempre son claros o no están presentes para todas las alturas. Middlebrooks identifica cuatro valles principales para el frente del plano sagital (marcados del número 1 al 4 para la FTD del ángulo $\phi = -60^\circ$) y una cresta principal para la espalda (marcada con el símbolo “*”). Adaptado de [133, Figs. 1 y 2].

Los datos de la Figura 5.8 provienen de un estudio donde Middlebrooks buscó escalar (trasladar los patrones a la izquierda o la derecha en el diagrama frecuencia vs. fase) la FTD de un sujeto para que logre asemejarse al de otro, pues mientras más pequeñas sean las dimensiones del sujeto, los patrones tienden a aparecer en frecuencias más altas en comparación con los sujetos de mayores dimensiones anatómicas [133]. Por esto último, únicamente observando las FTDs de los sujetos S35 y S07 se puede inferir que el sujeto S07 tiene mayores dimensiones anatómicas que el sujeto S35.

Es natural preguntarse si es necesario todo el detalle espectral de una FTD, por ejemplo, haciendo referencia a la Figura 5.9, a la izquierda se tiene la FTD correspondiente a la altura $\phi = -60^\circ$ del sujeto 32 de la Figura 5.8 (a). ¿Qué tan necesarios son los detalles encerrados en rojo para realizar la localización direccional? Para responder la pregunta se puede considerar la versión “suavizada” de la FTD, la cual se busca representar a la derecha de la Figura 5.9. Resulta que estas “crudas aproximaciones”, siguen teniendo efectividad para simular la localización [23, Sec. 22.4], además de que la presencia de las alteraciones N1, P1 y P2 son suficientes para crear la ilusión de escuchar un sonido en el

exterior (el sonido deja de escucharse dentro de la cabeza y lateralizado) [131, Sec. 2.2].

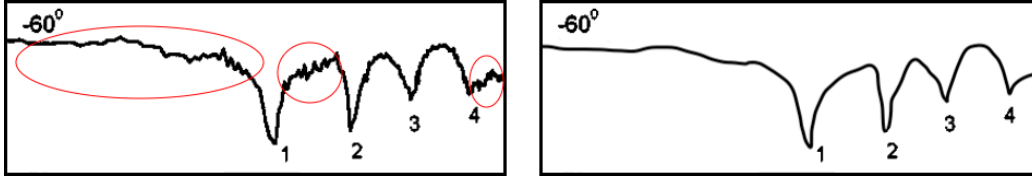


Figura 5.9: Ejemplo de una FTD “suavizada”. A la izquierda se tiene la FTD del sujeto S32 correspondiente a la altura $\phi = -60^\circ$ (Figura 5.8), se encierran las pequeñas fluctuaciones de la FTD que se piensan suavizar. A la derecha se tiene un ejemplo de la misma FTD suavizada.

La Figura 5.8 es un ejemplo de los diagramas de Bode de las HRTFs que se obtienen a partir de las funciones $\hat{h}_{\mathbf{L}[\delta]}^P$ o $\hat{h}_{\mathbf{R}[\delta]}^P$, definidas en la Ecuación (3.16), donde se está graficando la frecuencia vs. amplitud⁹. Este es un ejemplo de como la teoría de sistemas lineales e invariantes en el tiempo ha ayudado a comprender mejor la habilidad humana de la localización, ya que cada pista espectral tiene asociado un patrón específico de valles y crestas a lo largo del rango de frecuencias audibles, y tales patrones se pueden visualizar precisamente gracias al diagrama de Bode (obtenido a partir de la función de transferencia) de la HRTF.

También es posible obtener las pistas biaurales de DTI y DII, a partir de las HRTFs, por ejemplo, la DTI se puede obtener al comparar las formas de onda de las RIs $h_{\mathbf{L}}^P$ y $h_{\mathbf{R}}^P$ e identificar las diferencias temporales de actividad (*onsets*) en cada una. Métodos para inferir la DTI a partir del HRTF se discuten en [134]. Por su parte, la DII en el dominio de la frecuencia se obtiene mediante: $\text{DII}(\xi) = 20 \log_{10} \left| (\hat{h}_{\mathbf{L}}^P(i2\pi\xi))(\hat{h}_{\mathbf{L}}^P(i2\pi\xi))^{-1} \right|$ [38, Ec. 2].

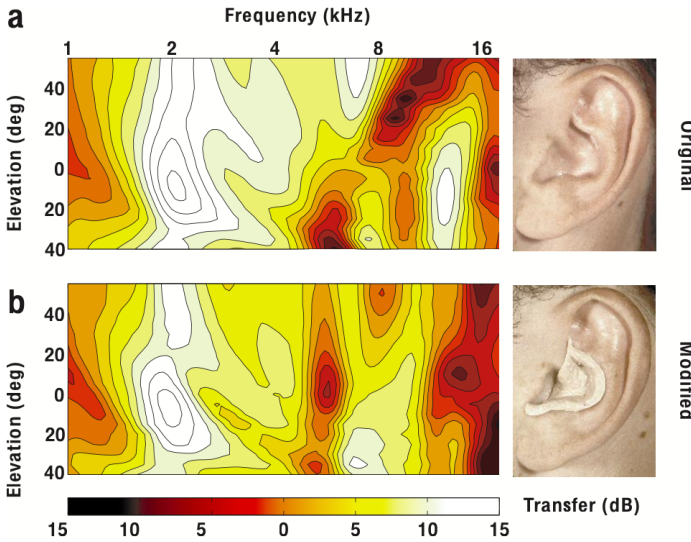


Figura 5.10: Gráfica coloreada de frecuencia vs. elevación vs. amplitud para una FTD con una oreja sin modificar y modificada. Figura tomada de [4, Fig. 1].

En la Figura 5.10 se ilustra como las pistas espectrales cambian en función de la dirección de procedencia del sonido y a su vez dependen fuertemente de la forma par-

⁹Como ya se mencionó en el Capítulo 2, en esta tesis no se ahonda en los detalles de la obtención de los diagramas de Bode a partir de la función de transferencia. Solo se enfatiza que a partir de $\hat{h}_{\mathbf{R}[\delta]}^P$, especialmente al considerar la función $\xi \mapsto |\hat{h}_{\mathbf{R}[\delta]}^P(i2\pi\xi)|$, se obtienen las gráficas que se muestran en las Figuras 5.8, 5.10, y más adelante en el capítulo para la Figura ???. El diagrama de Bode de la fase se obtiene a partir de $\xi \mapsto \arg(\hat{h}_{\mathbf{R}[\delta]}^P(i2\pi\xi))$.

ticular de la oreja. Paul Hofman y colegas [4] modificaron la forma de la oreja de cuatro sujetos de prueba con moldes. En un principio los sujetos de prueba tuvieron errores de localización con los moldes puestos, pero con entrenamiento adecuado y en cuestión de cuarenta días, los cuatro sujetos pudieron aprender las nuevas pistas espectrales, y pudieron localizar correctamente con o sin los oídos modificados por los moldes. Experimentos posteriores han respaldado esta extraordinaria capacidad del SNCA para poder aprender nuevas pistas espectrales en plazos relativamente cortos y sin olvidar las pistas espectrales “originales” (del oído sin ninguna alteración) [135, 136]. En ambas figuras se grafica la frecuencia (absisas) vs. ángulo de elevación (ordenadas) de la fuente sonora (en el plano sagital y al frente de la persona) vs. amplitud (color, donde los colores claros indican una amplificación y los oscuros atenuación).

Es sorprendente como de alguna manera, el SNCA es capaz de reconocer patrones en el dominio de la frecuencia de ondas sonoras, y más aún, memorizar, aprender y reaprender los patrones respectivos de cada dirección de procedencia. Es legítimo preguntarse si en verdad los patrones de crestas y valles del HRTF son la señal que el SNCA toma en cuenta para realizar la localización. Antes de abordar la justificación fisiológica de las pistas de la localización, se dedica una breve sub-sección a la localización en el espacio peripersonal y el campo difuso.

5.1.3. Localización en el espacio peripersonal y el campo difuso

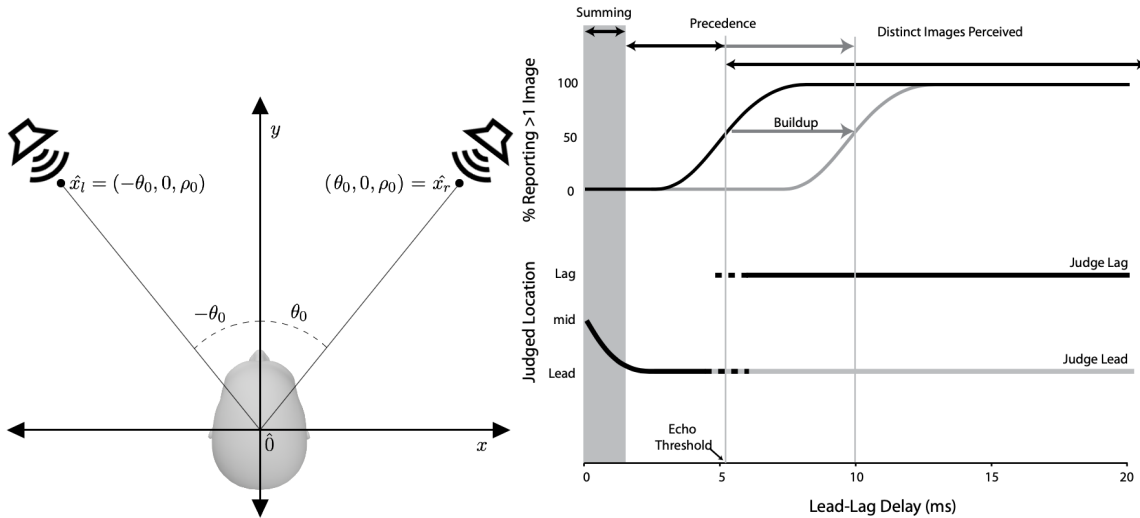
La localización de un sonido en el espacio peripersonal no es igual al caso extrapersonal, pues cambian algunos comportamientos de las pistas, por ejemplo, el fenómeno de la sombra acústica de la cabeza que da lugar a las DILs se exagera hasta el punto de crear DILs mucho mayores a las encontradas en el caso extrapersonal, por otra parte (y quizá el fenómeno más importante) las pistas monaurales se vuelven fuertemente dependientes de la distancia (a diferencia del caso extrapersonal), de modo que su estudio se vuelve más complicado pues se añade una variable más a tener en cuenta [82, Cap. 3]. En general, “las pistas de la localización en distancias menores a 1 m, son substancialmente diferentes de las mayores a 1 m” [82, p. 31]. La tesis doctoral de Brungart [82] es un buen punto de partida para explorar este caso, Xie Bosun (desde el enfoque de captura de HRTFs) también dedica parte de su obra a este caso [98, Sec. 2.4].

Localización en el campo difuso

Es un hecho que el ser humano puede localizar un sonido en el campo difuso, pues este es el caso común que se pone en práctica día a día. Por lo anterior, surge la pregunta: ¿cómo es posible realizar la localización en entornos donde la reflexión puede interferir o alterar radicalmente las pistas de la localización?, si bien aún no se comprende por completo este fenómeno, se tienen identificados mecanismos importantes que ayudan a esta tarea, concretamente el fenómeno *summing localization* y el *efecto de precedencia* (también llamado ley del primer frente de onda o efecto de Haas [23, Cap. 22]). Ambos juegan un papel importantes para la localización en el campo difuso.

Se considera la siguiente disposición: en una cámara anecoica un sujeto de pruebas se encuentra frente a dos altavoces en el plano horizontal y dispuestos simétricamente respecto al eje y , de modo que, en coordenadas esféricas del SCRC, $\hat{x}_l = (-\theta_0, 0, \rho_0)$ es la posición del altavoz izquierdo y $\hat{x}_r = (\theta_0, 0, \rho_0)$ la del derecho. Uno de los altavoces reproduce el sonido de un clic, antes que el otro. El altavoz que reproduce primero el

sonido se denomina *lead*, y el segundo *lag*, de este modo ambos altavoces reproducen el mismo sonido pero con un retraso de c_0 milisegundos. Resulta que si $0 \leq c_0 < 1$, ocurre el fenómeno de *summing localization*: los sujetos de prueba reportan un solo sonido y juzgan la dirección de procedencia del sonido entre ambos altavoces, es decir juzgan la dirección en el eje y (dirección $\hat{j} = (0, 1, 0)$) o cercano a este. Por otra parte si $2 \leq c_0 \leq 5$ ocurre el efecto de precedencia: los sujetos nuevamente reportan un único sonido, pero esta vez se reporta la dirección de procedencia correspondiente al altavoz *lead*. Esto último lleva a la conclusión de que ante el eco de un sonido (simulado por el experimento en cuestión), el sistema auditivo “suprime” dicho eco y solamente toma en cuenta los primeros 2 a 5 ms del sonido que llegan primero al oído para realizar la localización. El intervalo de 2 a 5 ms corresponde al sonido de clics, si se utiliza una fuente sonora de mayor duración y más rica en frecuencias (como el habla o la música) este intervalo se extiende hasta 50 ms o más [9]. Por último, cuando $c_0 > 5$ los sujetos de prueba reportan dos fuentes de sonido distintas y pueden localizar ambas fuentes sonoras sin problema. La Figura 5.11 (b) sintetiza los fenómenos de *summing localization* y precedencia. Se tienen dos gráficas encimadas que comparten el dominio que representa el retraso entre el altavoz *lead* y *lag* en milisegundos. El codominio de la gráfica superior indica el porcentaje de personas que reportan escuchar más de una fuente sonora (clics) en función del valor del retraso.



(a) Configuración del experimento del efecto de precedencia y *summing localization* en el SCRC. Edición sobre modelo de Vista Prime

(b) Figura tomada de [9, Fig. 14-8].

Figura 5.11: (a) Configuración del experimento que da lugar al efecto de precedencia y *summing localization* en el plano horizontal del SCRC. Esta configuración busca simular artificialmente el eco de una fuente sonora. (b) Resumen del efecto de precedencia y *summing* para estímulos breves (clics).

El codominio de la gráfica inferior muestra el juicio de localización en función del retraso. Se observa que en el primer milisegundo (zona gris) se reporta una única fuente sonora y el juicio de localización se encuentra en la mitad (dirección $\hat{j}$) (efecto *summing localization*), pero a medida que se llega a un retraso de 5 ms se comienza a reportar el juicio de localización como la posición del altavoz *lead* (efecto de precedencia), y también se

comienza a percibir la segunda fuente sonora. Concretamente a los 5 ms (umbral del eco - *echo threshold*) más de la mitad de los sujetos reportan dos fuentes sonoras distintas y se reconoce la localización de ambas fuentes sin problema. El umbral del eco puede alargarse en función de la posición o repetición de los clics (*buildup*), de modo que el efecto de precedencia depende fuertemente de las características particulares del estímulo sonoro.

5.2. Justificación fisiológica de las pistas de localización

Anteriormente se concluyó que la representación sonora que se envía finalmente al SNCA (a través del 8^{vo} par craneal) es un neurograma (representación análoga a un espectrograma): un arreglo de PSTHs que puede ordenarse por frecuencias, donde cada PSTH refleja la actividad temporal de cada fibra nerviosa auditiva (o conjunto de fibras con frecuencia característica similar). El siguiente paso en la *vía auditiva ascendente*¹⁰ es recorrer distintos *sitios* del tronco encefálico, tales sitios se presentan en pares (dispuestos de manera simétrica respecto al plano sagital) además de que cada uno posee una tonotopía particular (preservada desde la membrana basilar). En la Figura 5.12 se muestran los sitios involucrados en el proceso de audición y especialmente en la habilidad de localización, estos sitios son responsables del procesamiento de las pistas binaurales y monaurales.

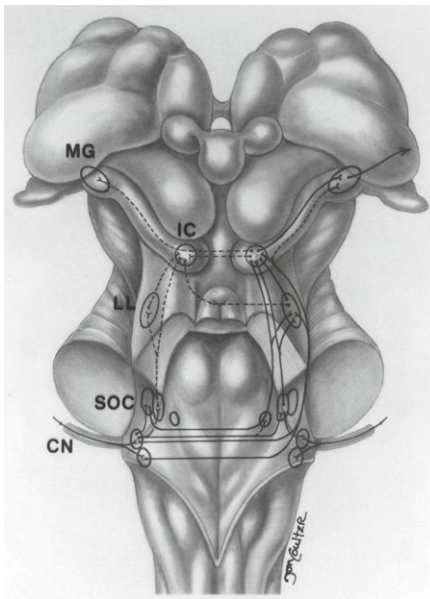


Figura 5.12: Sitios en el tronco encefálico encargados de la audición y localización. **1.** *núcleo coclear* (CN), contiene el *núcleo ventral coclear* (VCN) que se divide en el *núcleo ventral coclear anterior* (AVCN), *núcleo ventral coclear posterior* (PVCN) y *núcleo coclear dorsal* (DCN), **2.** *complejo olivar superior* (SOC), únicamente se mencionan tres de los sectores que contiene: *oliva superior lateral* (LSO), *oliva superior medial* (MSO) y *núcleo medial del cuerpo trapezoides* (MNTB), **3.** *colículo inferior* (IC), **4.** *lemnisco lateral* (LL), **5.** *cuerpo geniculado medial* (MG). Del MG se llega a partes específicas de la corteza cerebral. Imagen de [137, Fig. 8.3]

Cada uno de los sitios se caracteriza por el tipo de neuronas que lo componen. No se entrará en detalle sobre las neuronas de cada sitio y su manera de operar, solamente se manejará la noción de que las conexiones entre los sitios pueden ser *inhibidoras* o *excitadoras*, la comunicación inhibidora de un sector con otro produce una reducción en la actividad neuronal (reducción en la frecuencia de disparo) del sector receptor, por otra parte la comunicación excitadora aumenta la actividad neuronal (incremento en la frecuencia de disparo) del sector receptor [3, Cap. 5]. Teniendo todos lo anterior en cuenta,

¹⁰Una vez que las fibras nerviosas auditivas llegan al núcleo coclear se dividen en fibras ascendentes y descendentes, de modo que unas fibras parten del núcleo coclear y *suben* hasta la corteza cerebral mientras que otras fibras *bajan* de la corteza cerebral a otros sectores [3, Cap. 5].

se puede explicar *grosso modo* cómo es que el SNCA procesa las pistas de la localización ya discutidas.

La información que envía la cóclea de un oído a través de una fibra nerviosa auditiva se envía al núcleo coclear y se conecta con los tres sectores de cada VCN *ipsilateral*¹¹ a través de dos bifurcaciones de la fibra [137].

Una pista de diferencia de tiempo interaural se traduce en un retraso en ambos neurogramas que llegan a cada VCN. Para un lado determinado, el camino de una DTI comienza en el AVCN ipsilateral que a su vez se comunica con el MSO ipsilateral y *contralateral*¹². En este caso todas las conexiones son excitadoras. El consenso actual es que el mecanismo de comparación temporal que se requiere para procesar una DTI se realiza en el sitio MSO [3, 9, 14, 114]. El fenómeno de *phase locking* discutido anteriormente juega un papel fundamental en el procesamiento de las pistas de DTI, las neuronas de cada AVCN (*bushy cells*) proveen a cada MSO de trenes de disparo transportados en fibras cuya frecuencia característica es baja, por lo tanto tales trenes de disparo preservan la estructura temporal de los tonos bajos (la distancia entre crestas), así, “todo lo que las neuronas MSO necesitan hacer para determinar la DTI del sonido es comparar estos patrones [*phase locking*] de los oídos izquierdo y derecho.” [3, p. 197]. El proceso de comparación aún no se comprende enteramente y sigue en debate, sin embargo, se ha descubierto que tiene fuertes semejanzas con el modelo propuesto por Jeffress [3, 9, 138], discutido en §4.4.1. En el artículo *Coincidence Detection in the Auditory System: 50 Years after Jeffress* (1998), Joris y colegas mencionan que “la evidencia anatómica y fisiológica moderna muestra que la MSO es el sitio probable del modelo de Jeffress. Consiste en una larga lámina de células orientadas en un plano aproximadamente parasagital” [138, p. 1235]. Sigue en debate la operatividad del modelo, pues se han descubierto aspectos que no toma en cuenta, por ejemplo, el modelo supone únicamente dos líneas de transmisión excitadoras, y se descubrió que el MSO también recibe señales inhibitorias del MNTB (núcleo medial del cuerpo trapezoides) y el LNTB (núcleo lateral del cuerpo trapezoides), que influyen en el comportamiento del MSO [9] y [3, Cap. 5]. Al margen de esto, Stecker y Gallun mencionan que “los mecanismos neuronales subyacentes a esa sensibilidad [DTI] deben ser al menos *formalmente* similares a los propuestos por Jeffress hace más de 60 años” [9, p. 406].

En la Figura 5.13, se tiene la representación del camino que recorre una pista de DTI (datos fisiológicos de un gato). Se puede observar como cada sitio tiene una tonotopía. Para el caso del MSO se observa la prevalencia de frecuencias bajas, acorde con la teoría duplex (las DTIs solamente son efectivas para frecuencias bajas, < 1600 Hz para el caso del humano). Después del MSO los siguientes sitios son el IC (colículo inferior) y el DNLL (núcleo dorsal del lemnisco lateral) ipsilaterales. En este caso, el rango audible del gato es arriba de 32 kHz. Las neuronas del AVCN son del tipo *bushy*. BC: *bushy cells*, ANF: *auditory nerve fiber*.

Por otra parte, una pista de diferencia de intensidad interaural se traduce en una diferencia de amplitud (frecuencia de disparo) de ambos neurogramas que llegan a cada VCN. Como ya se mencionó, los tonos graves no son afectados por la sombra acústica que produce la cabeza, por lo que las diferencias en los neurogramas solo será significativa para frecuencias altas (> 3000 Hz para el caso humano). El camino de una pista de DII en el SNCA (para un lado fijo) comienza en el AVCN ipsilateral que manda señales excitadoras al LSO ipsilateral y al MNTB contralateral, este último a su vez manda señales

¹¹adj. Med. Perteneciente o relativo al mismo lado (RAE).

¹²adj. Med. Perteneciente o relativo al lado opuesto al que se considera (RAE).

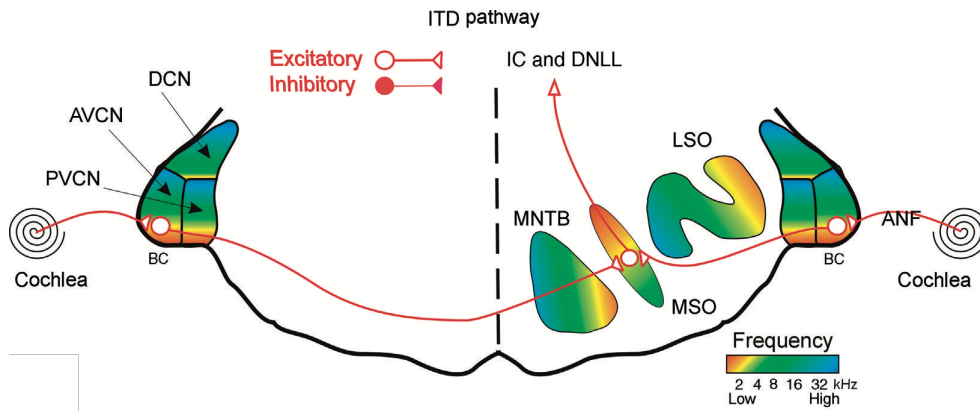


Figura 5.13: Camino de las pistas DTI (gato), adaptado de [14, Fig. 2].

inhibidoras al LSO ipsilateral. Por lo tanto cada sitio LSO recibe una señal inhibitoria del oído contralateral y al mismo tiempo recibe una señal excitadora del oído ipsilateral. El LSO es el responsable de restar ambas señales y procesar la DII [9, 14, 114] y [3, Sec. 5.3.2]. Posteriormente cada LSO envía la información al IC y al DNLL contralaterales.

En la Figura 5.14 se representa el camino que toma una pista DII. Se observa que el LSO tiene una organización tonotópica que privilegia las frecuencias altas, nuevamente acorde con la teoría duplex de Rayleigh (las DII solamente son efectivas a frecuencias altas, > 3000 Hz para el caso humano).

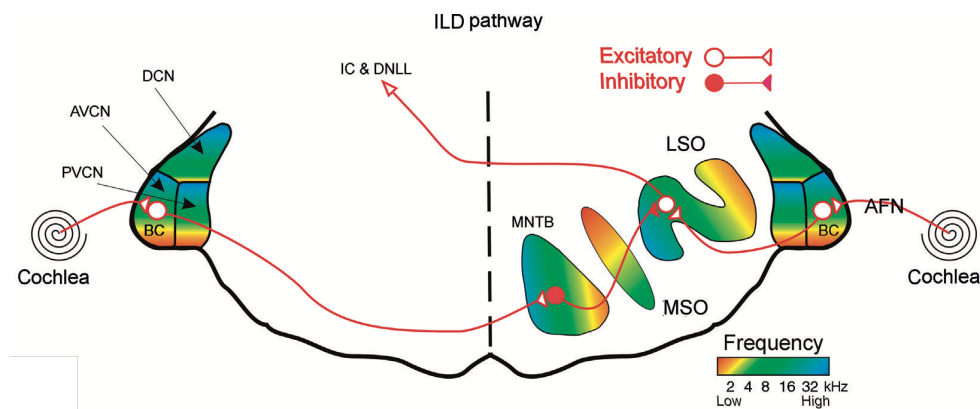


Figura 5.14: Camino de las pistas DII (gato). Adaptado de [14, Fig. 3].

Finalmente, para el caso de las pistas monaurales, la hipótesis actual es que el DCN ipsilateral procesa las pistas espectrales del oído ipsilateral, pues posee neuronas sensibles a características espectrales de un sonido [9, 14, 114], esto va acorde con la aseveración de que las pistas espectrales son principalmente monaurales (únicamente necesitan la información de un solo oído para procesarse) y confirma que los valles y crestas de la FTD son reconocibles por el SNCA. Cada DCN envía información al IC contralateral, se ha mostrado que cortar los nervios que conectan el DCN con el IC de un gato no afectan su audición, pero sí su habilidad de localización [3, Sec. 5.3.1].

Esto fue un breve resumen de los sitios involucrados en la audición y la localización. Información y diagramas más completos de los sitios involucrados en el proceso de audición se pueden encontrar en [9, Fig. 14-2], [3, Fig. 2.17] y [23, Fig. 22.8]. La tesis doctoral de Julie Wall: *“Post-Cochlear Auditory Modelling for Sound Localisation using Bio-Inspired Techniques”* ahonda en la habilidad de localización desde el punto de vista de la neurociencia y redes neuronales artificiales.

5.2.1. Resumen de la habilidad de localización y el SNCA

Se concluye el apartado con la Tabla 5.2 que sintetiza aspectos importantes sobre las pistas de la localización.

	Pista	Función	Fenómenos principales que la generan	Frecuencias en las que opera	Sitio principal de procesamiento
PISTAS BIAURALES (TEORÍA DUPLEX DE RAYLEIGH)	Diferencia de tiempo interaural (DTI)	Asocia una diferencia de tiempo (en microsegundos - μs) de llegada de un sonido a ambos oídos con una dirección determinada del plano horizontal	Tamaño de la cabeza (distancia interaural) y la velocidad del sonido	$< 1.6 \text{ kHz}$	Oliva superior medial (MSO)
	Diferencia de intensidad interaural (DII)	Asocia una diferencia de intensidad (en decibelios - dB) entre ambos oídos con una dirección determinada del plano horizontal	Tamaño de la cabeza, fenómenos acústicos de difracción y reflexión	$> 3 \text{ kHz}$	Oliva superior lateral (LSO)
PISTAS MONAURALES	Patrón espectral	Asocia un patrón espectral (visible a través de la función de transferencia direccional - DTF o HRTF) con una dirección determinada del espacio	Interacción del sonido (resonancias y antiresonancias) con el cuerpo, principalmente la oreja	$> 3 \text{ kHz}$	Núcleo coclear dorsal (DCN)

Tabla 5.2: Síntesis de aspectos importantes sobre las pistas de la localización.

5.3. Implementación en MAXMSP de un simulador de HRTF para el plano horizontal

En esta última sección se presenta una aplicación de MAXMSP, que busca simular un conjunto de HRTFs para el plano horizontal. En función de una dirección elegida, la aplicación procesa una señal de audio en “tiempo real”, y entrega dos salidas en cada oído (mediante el uso de audífonos), donde la señal fue procesada para simular los estímulos de la localización de la dirección en cuestión. El archivo puede descargarse en el siguiente enlace: github.com/cesariovb/HRTF-Simul-MaxMSP-Horizontal.git.

Se utilizó MaxMSP por dos razones: 1) la audiencia objetivo es cualquier persona interesada en el uso y aplicación de filtros HRTFs a composición musical electro-acústica o electrónica, y MaxMSP es un programa conocido y usado en estos ámbitos, y 2) aunque se trate de un programa escrito (principalmente) en C, C++ y JUCE, es extremadamente amigable con el programado/usuario, ya que

...es un lenguaje de programación orientado a objetos con una interfaz gráfica de usuario (GUI). Esto significa que las líneas de código que definen cada objeto realmente existen, pero que usted, como programador, nunca tiene que verlas.

En cambio, los objetos sirven como representación gráfica de estas líneas de código, haciéndolas mucho más intuitivas para manejar. [...] Algunos podrían ponerlo en la clase de un entorno de programación, pero podría describirse mejor como una aplicación para programación [139, p. 6].

Sin embargo, no todo es miel sobre hojuelas, ya que se trata de un programa de código cerrado.

5.3.1. Interfaz y funcionamiento

Una vez que se abre la aplicación se verá la siguiente interfaz.

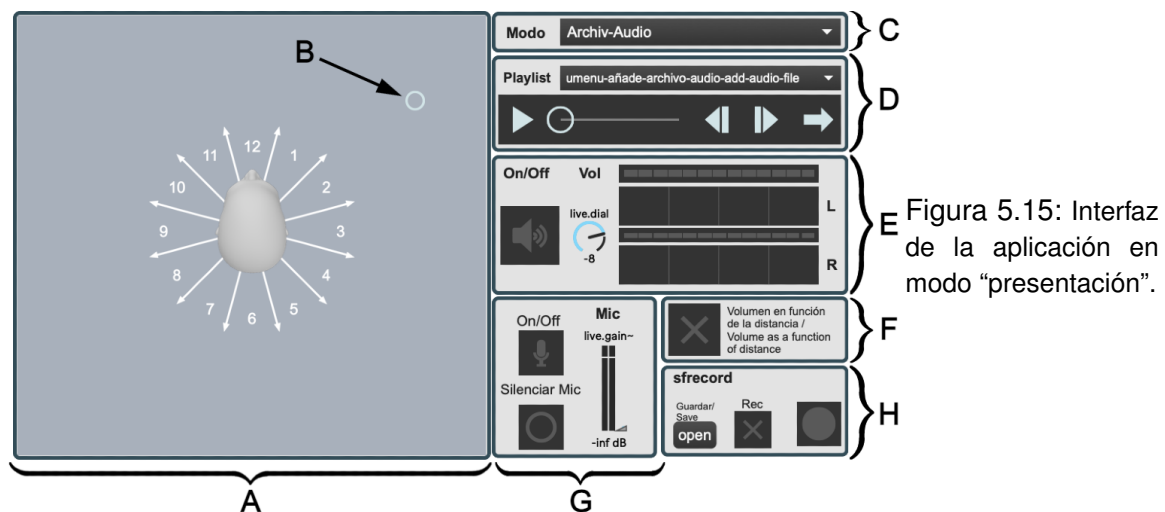


Figura 5.15: Interfaz de la aplicación en modo “presentación”.

- **A** es un panel donde al hacer click (o arrastre + click sostenido) en él, se elige la dirección de procedencia del sonido en el plano horizontal.
- El círculo señalado en **B** muestra el punto de procedencia elegido.
- En el menú desplegable en **C**, se eligen los modos de operación del parche, que son tres: *Archiv-Audio* corresponde a usar archivos de audio, *Mic* utiliza el micrófono, y *Archiv-Audio + Mic* ambas.
- En **D**, mediante el objeto `umenu`, se pueden añadir archivos de audio que se quieran procesar por el parche.
- En **E** se activa o desactiva el parche, también se controla y visualiza el volumen.
- En **F** el objeto `toggle` activa y desactiva el tomar en cuenta el volumen en función de la distancia al origen del panel, a medida en que el punto se acerca al origen del panel, el volumen aumenta.
- En **G** se activa y desactiva el micrófono, se controla el volumen de este y también se añade un botón que reduce inmediatamente el volumen (útil cuando hay retroalimentación del micrófono con las bocinas del equipo).
- Finalmente, en **H** se puede grabar la salida (estéreo) del parche con ayuda de `sfrecord`.

5.3.2. Modelos y métodos seguidos

Al desactivar el modo presentación, se verá la siguiente configuración.

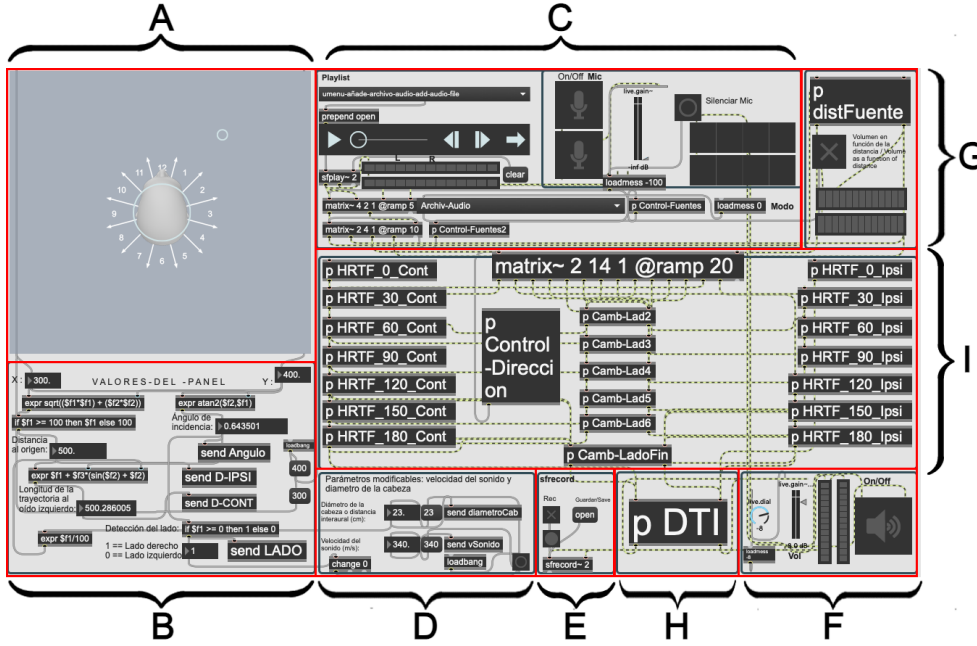


Figura 5.16: Configuración del parche.

- **A** corresponde al objeto `panel1`, que considera valores $x \in [-700, 700] \subset \mathbb{Z}$ tanto para las ordenadas como las abscisas. El origen se considera al centro del cuadrado.
- En **B** se extraen las dos coordenadas x y y actuales del punto elegido en el panel, y a partir de estas se puede obtener el ángulo del vector mediante $\arctan2(y, x)$, y se obtiene la norma $\|(x, y)\|$ (euclidiana). Todo lo anterior se plantea desde el SCRC y los valores se envían a través de los objetos `send` y se reciben en distintas partes del parche con el objeto `receive`. También se añade un mecanismo para detectar si el punto elegido está a la derecha del plano sagital o a la izquierda, más adelante se verá la utilidad de esto.
- En **C** se controlan los modos de operación del parche, las entradas del sistema son archivos de audio, `sfplay` reproduce archivos provenientes de `umenu` y a su vez es controlado por un `playbar`. También se añade el micrófono y controles de este.
- En **D** se almacenan dos valores importantes para el modelo de DTI: la distancia interaural (o diámetro de la cabeza) en `cm` (por defecto `23 cm`) y la velocidad del sonido en el aire (por defecto `340 m/s`).
- **E** y **F** corresponden a la configuración para grabar la salida del parche y el control del volumen del parche respectivamente.

Los sectores que requieren de mayor atención son **G** (volumen en función de la distancia al origen), **H** (simular las DTIs) e **I** (simulación de HRTFs).

Volumen en función de la distancia al origen

Suponiendo que la fuente sonora tiene una intensidad fija I_0 , los cambios de amplitud en el punto de recepción (en este caso es el origen del SCRC) en función de la distancia a la fuente, se pueden modelar con la ley del cuadrado inverso (ver (3.9)).

Se asume que los cambios de intensidad en dB SPL en función de la distancia ρ (en metros) a la fuente, está dada por la función $\text{DIST}(\rho) := L_{\text{dB}}(I_0) - 20 \log_{10}\left(\frac{1}{\rho}\right)$. La implementación de los cambios de volumen en función de la distancia con ayuda de esta última ecuación se muestra en la Figura 5.17, que corresponde al contenido del subparche¹³ llamado “distFuente” (G en la Figura 5.16).

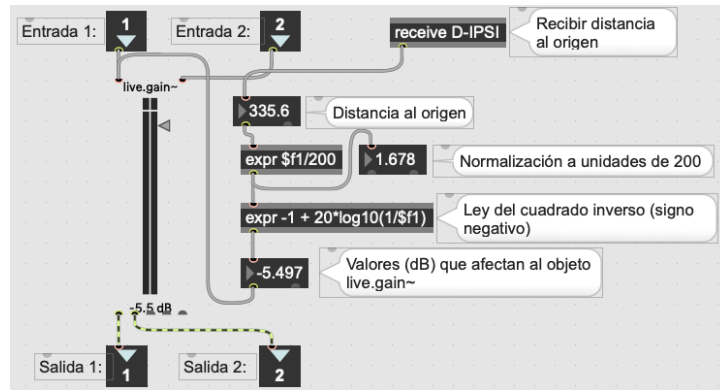


Figura 5.17: Subparche distFuente.

Modelar las diferencias de tiempo interaurales

El modelo usado para las pistas de DTI, se basa en el mismo concepto detrás del modelo *ray tracing* (mencionado en §3.2), donde se considera la cabeza humana como una esfera en el SCRC. Un sonido emitido a una dirección θ del SCRC, lo suficientemente alejado del origen (en el campo lejano de todas las frecuencias audibles), llegará al oyente como una onda plana, por lo que dos líneas paralelas (rayos) separadas por el diámetro $2r$ (en metros) de la esfera se consideran como el sonido incidente en cada oído. Si el sonido se emite desde el primer cuadrante del plano XY (como es el caso de la Figura 5.18), el sonido llega primero al oído derecho, mientras que el “rayo” del oído izquierdo tendrá que recorrer un camino adicional, dado por el segmento de recta de longitud $r \sin \theta$ junto con el segmento de arco de longitud $r\theta$, en este caso, el sonido que llega al oído

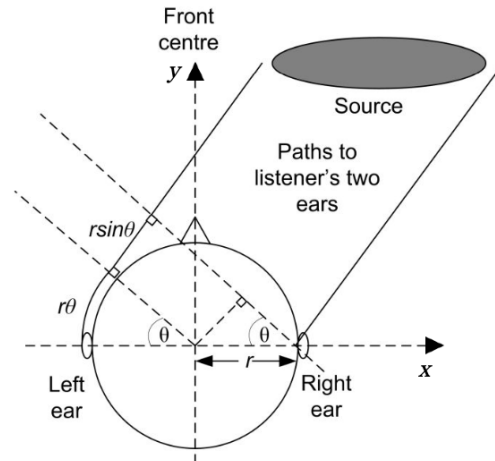


Figura 5.18: Modelo de una pista DTI (cabeza esférica) de Rayleigh/Woodworth. Figura tomada de [114, Fig. 2.5].

izquierdo tendrá un retraso (en segundos) dado por la función $\text{DTI}_r(\theta) := \frac{r(\sin \theta + \theta)}{c_0}$, donde c_0 es la velocidad del sonido en el aire. De acuerdo a la Tabla 5.2, las DTIs serán más significativas para frecuencias bajas ($< 1.6\text{kHz}$). En la Figura 5.19 se muestra como se implementaron las pistas de DTI con ayuda de la función $\text{DTI}_r(\theta)$ en el subparche la-

¹³El objeto *patcher* (o simplemente *p*), permite tener un parche dentro de otro parche.

mado “DTI” (H en la Figura 5.16). Primero se recibe el ángulo de incidencia (variable), el diámetro de la cabeza y la velocidad del sonido (constantes), para calcular la fórmula de DTI en ms con ayuda del objeto `expr`. Posteriormente el DTI se comunica a un sistema de retraso de la señal con ayuda de los objetos `tapin~` y `tapout~`. El objeto `matrix~` está configurado para tener 4 entradas y dos salidas, `matrixctrl` elige los casos correctos (retraso al canal izquierdo si el sonido proviene de la derecha y retraso al derecho si el sonido proviene de la izquierda).

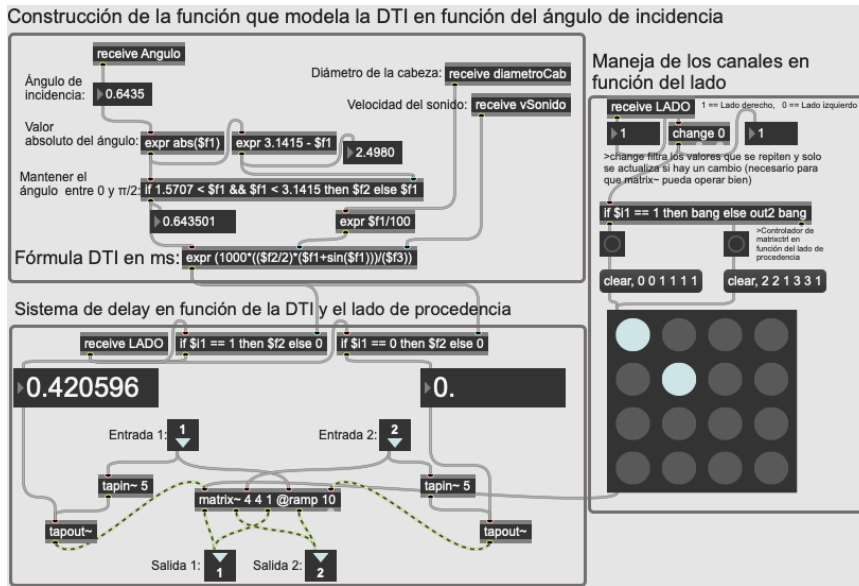


Figura 5.19: Subparche DTI.

Modelar las DIIs y las pistas espectrales

Las pistas más difíciles de modelar son las DIIs y las pistas espectrales, pues como se vio en secciones anteriores (a diferencia de las DTIs), se trata de pistas que dependen fuertemente de la frecuencia y para el caso de las pistas espectrales dependen de los rasgos anatómicos de cada persona.

Para modelar estas pistas, se buscó imitar los diagramas de Bode (frecuencia vs. amplitud) de distintas FTDs para el plano horizontal. Esto último se logra con una serie de objetos `filtergraph~` (en configuración *peaknotch*), conectados en cascada (dependiendo del caso, se usaron de 8 a 11 filtros), y con los cuales es posible diseñar un filtro acústico visualmente, de modo que imite un determinado diagrama de Bode, sin tener que lidiar directamente con los coeficientes de la función de transferencia sinusoidal. La idea de modelar la respuesta en frecuencia filtros HRTF con ayuda de filtros simples, es mencionada por Susnik y colegas: “Dado que el espectro de HRTF consta de máximos y mínimos distintivos, el espectro podría aproximarse mediante el uso de resonadores y filtros *notch*” [140, p. 1]. En la Figura 5.20 se muestra el subparche HRTF_120_Cont (mostrado en la Fig. 5.16 I), donde se busco imitar el diagrama de Bode de una FTD para el oído izquierdo y la dirección 120° (Fig. 5.22). Las líneas divisorias en el eje de las ordenadas corresponde a 10 dB SPL y en las abscisas corresponde a 1000 Hz. Este último método se siguió para un total de siete direcciones, la Figura 5.22 muestra todos los diagramas que se buscaron imitar con ayuda de los filtros en cascada. En total se tienen 14 filtros, que corresponden a los 14 sub-parches en Fig. 5.16 I.

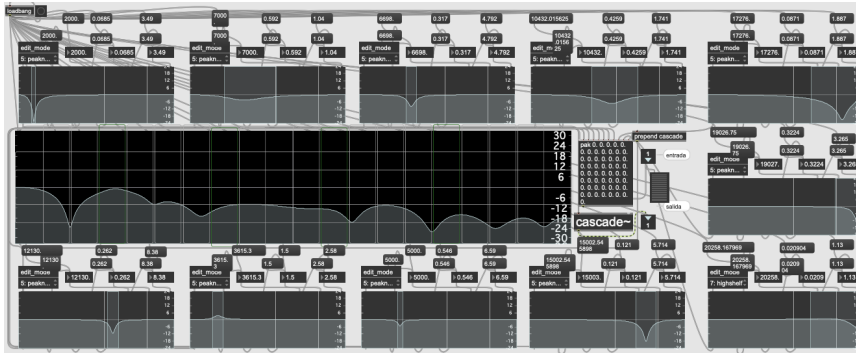


Figura 5.20: Imitación del diagrama de Bode de una FTD izquierda y ángulo de acimut 120° (ver Fig. 5.22) con ayuda de 11 filtros *peaknotch* conectados en cascada.

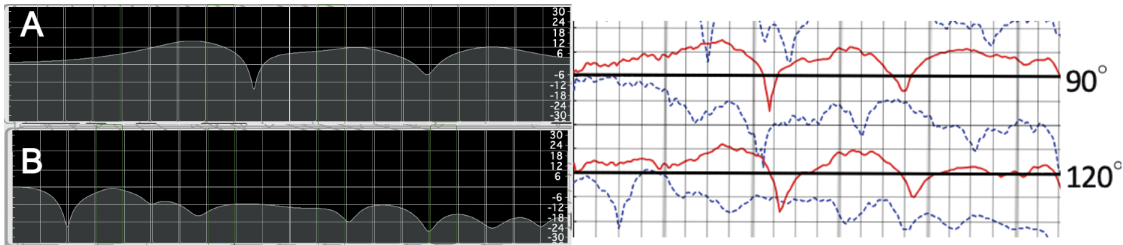


Figura 5.21: Filtros modelados y FTDs. El filtro **A** corresponde a la gráfica de 90° para el oído derecho (línea roja) y el filtro **B** corresponde a 120° para el oído izquierdo (línea azul punteada). Figuras adaptadas de [99, Fig. 2.1].

Los filtros modelados de esta forma son solo una aproximación de las gráficas en la Figura 5.22, sin embargo, en §5.1.2 se mencionó como estas aproximaciones también son efectivas para simular los estímulos de la localización. En la Figura 5.21 se muestran dos comparaciones entre el filtro modelado y la gráfica de la FTD que se busca imitar.

Las direcciones faltantes se pueden añadir de manera inmediata invirtiendo los filtros de cada oído, por ejemplo, si bien no se tiene la HRTF correspondiente a $\theta = -60^\circ$, esta última se puede construir tomando la FTD izquierda asociada a $\theta = 60^\circ$, pero dirigiéndola al oído derecho, y tomando la FTD derecha con $\theta = 60^\circ$, pero dirigiéndola al oído izquierdo.

El método anterior presupone que el cuerpo humano es totalmente simétrico (respecto al plano sagital) y ambas orejas tienen misma forma, aunque en la realidad esto no ocurra, este es un método utilizado para ahorrar el número de captura de HRTFs.

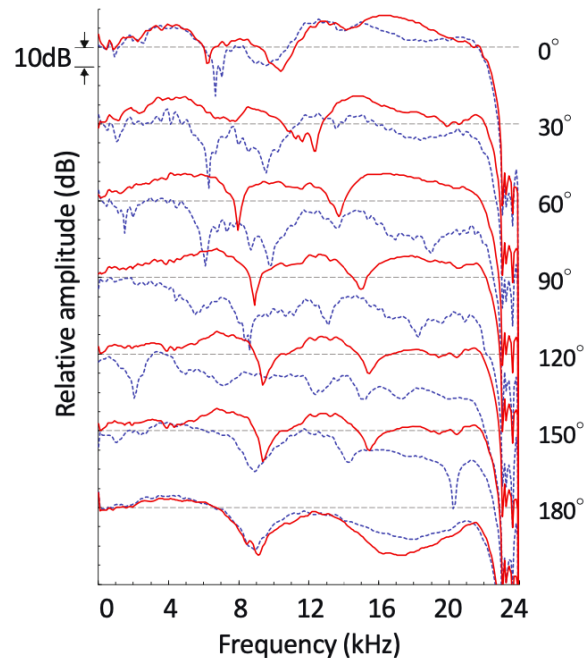


Figura 5.22: FTDs o HRTFs que se buscaron modelar con el método ilustrado en la Figura 5.20. Las gráficas en rojo corresponden a FTDs derechas y las azules punteadas al FTDs izquierdas. Figura tomada de [99, Fig. 2.1].

Para implementar los cambios con base en la dirección se usó un objeto `matrix~` con 2 entradas y 14 salidas, y cada una de estas últimas va dirigida a uno de los filtros DTFs. Se realizó un sub-parche “Control-Dirección” y se añadieron más sub-parches con objetos `matrix~` y `matrixctrl` para elegir los filtros en función del ángulo θ . El resultado final se ilustra en la Figura 5.23 (a), mientras que en la Figura 5.23 (b) se muestran los sectores circulares coloreados que corresponden a cada filtro.

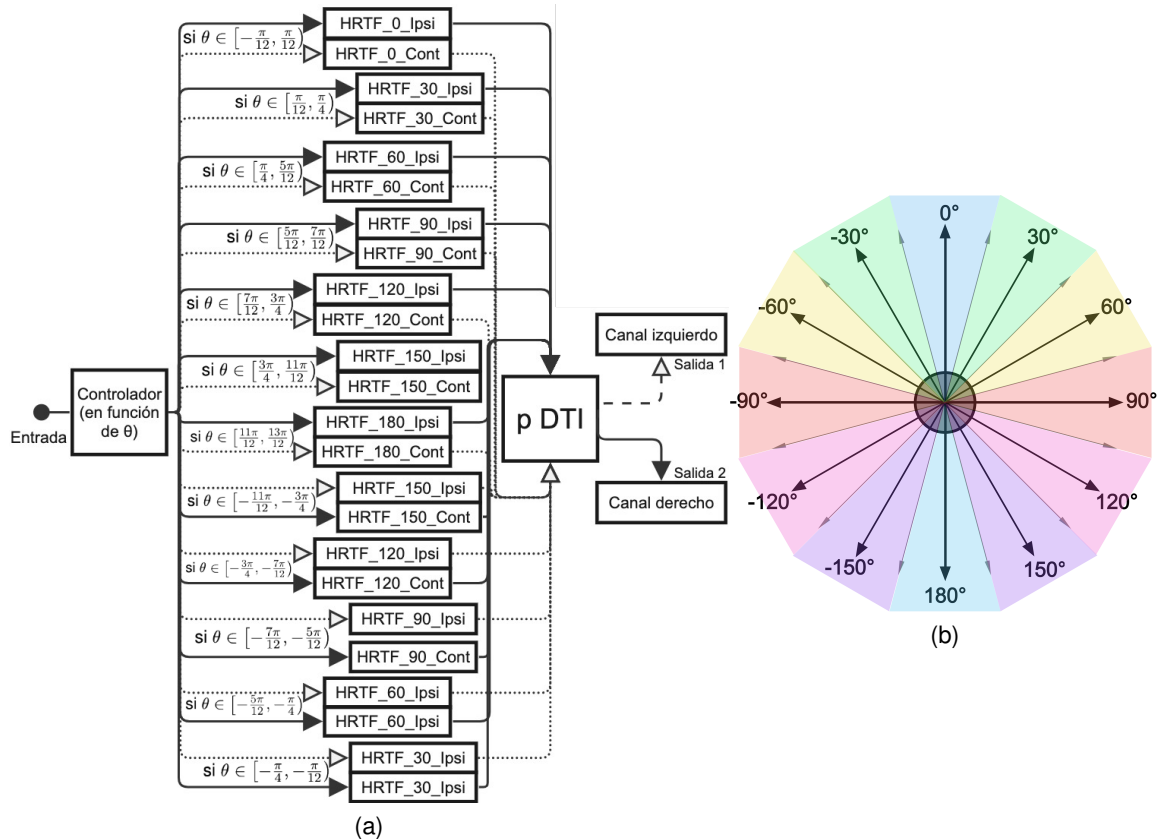


Figura 5.23: (a) Diagrama de bloques del parche. (b) Doce sectores circulares correspondientes a cada filtro.

Las flechas sólidas corresponden al camino dirigido al canal derecho y las flechas punteadas al canal izquierdo. El diagrama muestra que se trata de distintos sistemas conectados en paralelo, donde un rango determinado de ángulos tienen una dirección asociada. Cada salida de los filtros que imitan los HRTFs se dirige al sub-parche DTI, para finalmente entregar dos salidas filtradas y desfasadas.

5.3.3. Efectividad del modelo

Ya explicada la interfaz, funcionamiento y métodos, lo único que queda es verificar en qué medida este modelo implementado logra simular satisfactoriamente los estímulos de la localización (en el plano horizontal). Para esto último, se hizo un test con quince participantes adultos, el cual consistió en lo siguiente: se les pidió a los participantes usar audífonos y estar en un ambiente silencioso. Se prepararon quince muestras de sonido

(fragmentos de voz + ruido rosa¹⁴), que fueron procesada por el parche para todas las direcciones (las direcciones 60° , 180° y -30° se repitieron). Los participantes escucharon cada muestra (presentadas en desorden) sin saber la dirección asociada a la muestra, posteriormente eligieron la dirección que juzgaron correcta de entre cuatro opciones posibles (una correcta y tres direcciones aleatorias). Los resultados se resumen en las figuras 5.24 y 5.25. Cada sector muestra el porcentaje de participantes que juzgaron la dirección como la correcta. El sector coloreado en verde es la dirección correcta asociada a la muestra. Los sectores con patrones de cebra no fueron elegidos por ningún participante. Al tratarse de una aproximación de HRTFs genéricos y un modelo de DTI también genérico, es natural obtener confusiones frente/espalda, las cuales se pueden observar en Figuras 5.24 (a), (b), y (c), así como en las figuras 5.25 (b), (d), (e), (j), y (l). Cuando las alternativas incorrectas están en el mismo lado del plano sagital, y que es contrario al de la respuesta correcta, la efectividad es del 100 % (Figs. 5.25 (g) y (h)). También se observan errores cuando las alternativas son sucesivas, sin embargo, la lateralización se respeta (Figs. 5.24 (a), (b), (c), y Figs. 5.25 (b), (f) y (k)).

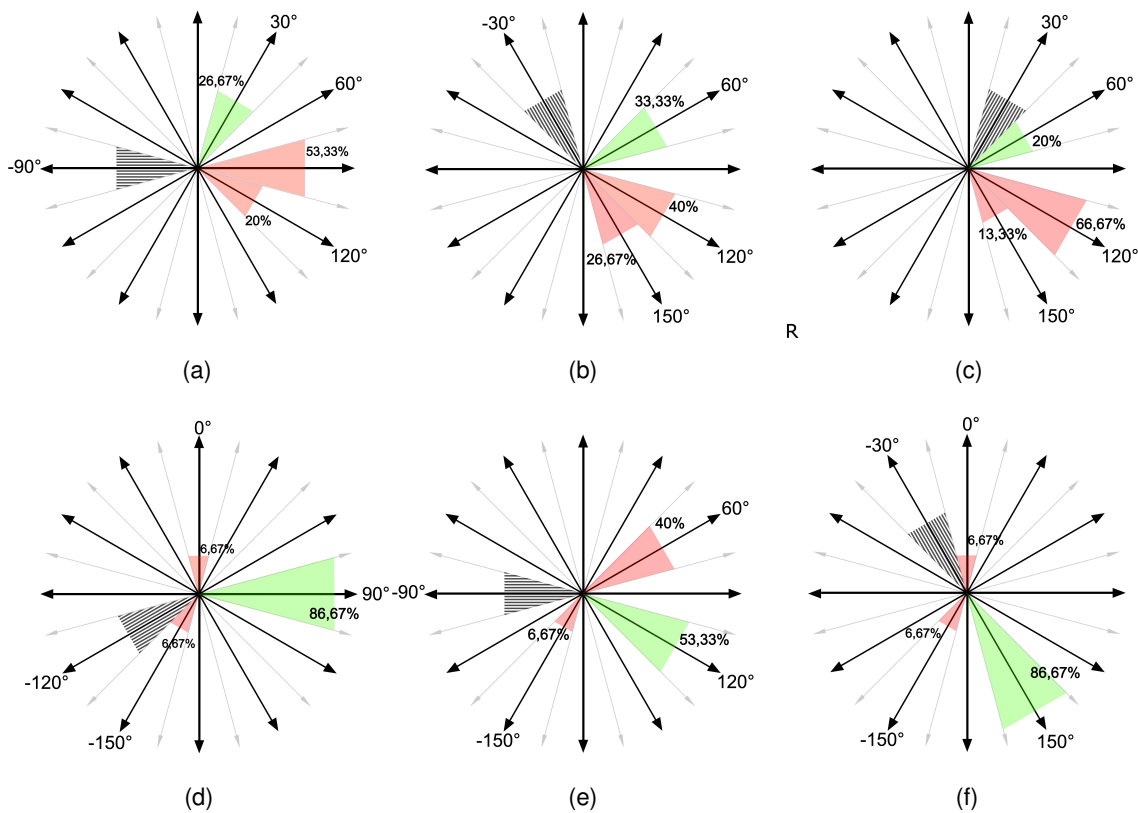


Figura 5.24: Resultados del test para distintas direcciones ($\theta = 60^\circ$ se repite).

¹⁴El ruido rosa tiene presencia en todo el rango auditivo de frecuencias, por lo que es ideal para localizar. La voz añade dinamismo a la muestra sonora.

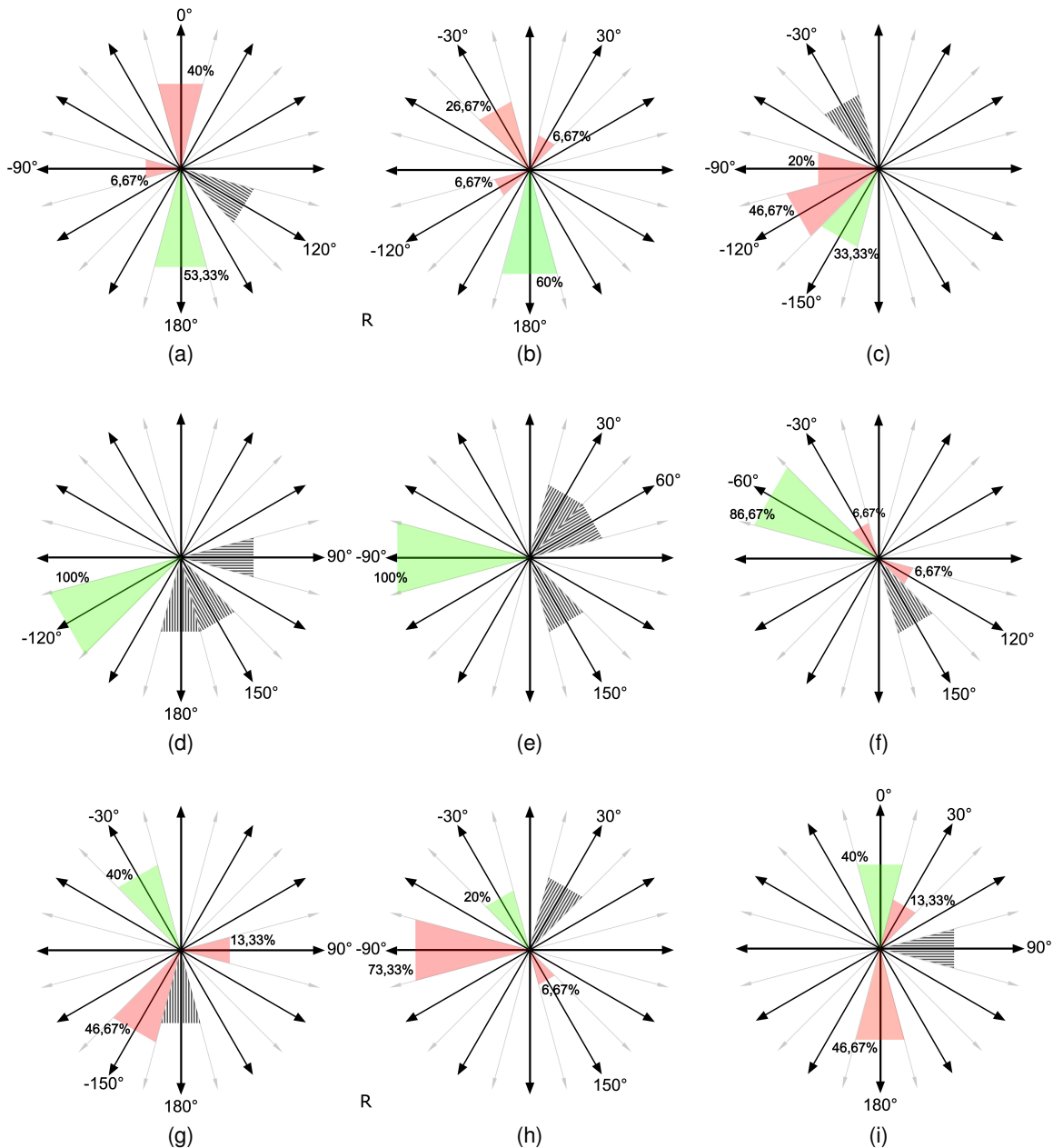


Figura 5.25: Resultados del test para distintas direcciones (continuación). Las direcciones 90° y -30° se repiten.

5.4. Observaciones finales

Respecto al proceso fisiológico de la audición

Lo abordado desde el Capítulo 4 hasta §5.2 fue un bosquejo del proceso de audición para los primeros tres sectores auditivos y la habilidad de la localización en el SNCA. Únicamente se han descrito aspectos clave de la vía auditiva ascendente, y se ha planteado la localización (y la audición) como un proceso unidireccional, sin embargo también

existe la “vía auditiva descendente”, y consiste en “innumerables neuronas que transmiten información hacia abajo, desde la corteza frontal a la corteza auditiva, desde la corteza auditiva a cada nivel de procesamiento subcortical (...) Estas proyecciones descendentes incluso llegan hasta la cóclea” [3, p. 92], por lo tanto, el proceso de audición no se puede tratar del todo como unidireccional, pues tan pronto como el neurograma entra al tronco encefálico, comienzan a darse varias bifurcaciones, bucles de retroalimentación, circuitos, y sub circuitos intrincados “que permiten reafinar el sistema sobre la marcha, hasta el nivel de la mecánica de la cóclea, para adaptarlo a las demandas particulares a las que se enfrenta el sistema auditivo en diferentes entornos o circunstancias” [3, p. 92]. Aunado a lo anterior, no es concluyente que el proceso de localización termine en el tronco encefálico, existe evidencia que sugiere que la localización requiere de procesamiento en la corteza cerebral [3, Sec. 5.5].

Respecto al modelo implementado

Si bien las pistas DTI se pudieron modelar e implementar de manera directa y “desde cero”, para modelar e implementar las pistas DII y espectrales se utilizaron HRTFs capturadas en una cámara anecoica, concretamente se utilizó la Figura 5.22, sin embargo, no fue necesario conocer la función de transferencia explícita ni sus coeficientes, únicamente con la forma de las gráficas se buscó modelar la respuesta en frecuencia mediante filtros simples conectados en cascada. Los resultados mostrados en las figuras 5.24 y 5.25 muestren la existencia de confusiones frente-espalda, sin embargo, se observa que este método “rudimentario”¹⁵ tiene un buen grado de efectividad en cuanto a lateralización.

Se pueden hacer diversos mejoramientos al modelo (en cuanto a efectividad y reducción de confusiones frente-espalda), algunos personalizados y otros más generales. a continuación se mencionan:

1. Una primera mejora personalizada es cambiar el parámetro de distancia interaural (por defecto 23 cm) a la personal de quien use la aplicación (Fig. 5.16 D).
2. La fórmula utilizada para la DTI en función del ángulo de incidencia θ fue: $DTI_r(\theta) = r(\sin \theta + \theta)c_0^{-1}$. Se pueden encontrar mejoras a este modelo (por ejemplo en [141]), por lo que también se pueden implementar estas mejoras a la aplicación.
3. Debido al método de escalamiento (ver 2.4.3) proveniente de [133], es posible trasladar las frecuencias de cada uno de los filtros a la izquierda o la derecha según sea el caso para personalizar el HRTF. Si bien no se saben las dimensiones anatómicas del sujeto asociado a la Fig. 5.22, se puede seguir el mismo método con un conjunto de HRTFs donde sí se conozcan las dimensiones anatómicas, y partir de ese punto para aplicar el método de escalamiento.
4. En el modelo se toman 7 direcciones correspondientes a la derecha del plano sagital, posteriormente se deducen las 5 direcciones correspondientes de manera simétrica al lado izquierdo del plano sagital. En la implementación se admite una cantidad arbitraria de filtros (tantos como sub-parches se puedan crear), por lo que se puede añadir más resolución al modelo añadiendo más filtros pertenecientes al plano horizontal o incluso añadiendo filtros que ya tengan una elevación asociada.

¹⁵Rudimentario en el sentido de que no se está trabajando con coeficientes de una función de transferencia, simplemente se está imitando la respuesta en frecuencia gráficamente y se está ignorando por completo la respuesta en fase.

Capítulo 6

Conclusiones

Como se advirtió en la introducción, la tesis se desarrolló conforme al mapa conceptual en la Figura 1.3, y buscando dar respuesta a las preguntas planteadas en §1.2.

En el Capítulo 2 se dieron respuestas a las preguntas (i) a (v). Se definieron los conceptos: sistema LIT, caja negra (comportamiento), respuesta al impulso, impulso, convolución, y función de transferencia. A partir de estas definiciones, se documentó (y en algunos casos se demostró) las proposiciones y teoremas necesarios para poder esclarecer las relaciones importantes entre todos estos conceptos matemáticos. Esto se ve reflejado en las proposiciones y teoremas mencionados a lo largo del capítulo. Para esclarecer la importancia y papel de la función de transferencia en la teoría, fue necesario abordar conceptos de análisis armónico y análisis complejo. A propósito del análisis armónico, se discutieron aspectos importantes de la transformada de Fourier, tanto para el caso continuo como el discreto. Se discutió como el concepto de muestreo es un medio para transitar de un comportamiento LIT continuo a uno discreto. Por último, también se observó que la teoría de integración y de ecuaciones diferenciales ordinarias abordada en §2.1, es capital para comprender la teoría de sistemas LIT de tiempo continuo. En todo lo anterior, el apoyo principal estuvo en los trabajos de Mónica Clapp [55], Eduardo Sontag [30], y Gasquet-Witomski [56].

En el Capítulo 3 se dieron respuestas a las preguntas (vi) y parte de (vii). Se documentó y (cuando fue posible) se justificó como se aplican los conceptos de la teoría de los sistemas LIT al fenómeno físico del sonido y el procesamiento digital de señales acústicas, donde el concepto de muestreo es capital. Posteriormente se explicó el escenario de captura de HRTFs desde las términos de la teoría de sistemas LIT establecida en el Capítulo 2, haciendo énfasis en como (gracias al teorema de muestreo) el escenario simulado reproduce satisfactoriamente los estímulos asociados al escenario real (Fig. 3.11). Si bien no se justificó rigurosamente, desde el sistema de definiciones de Eduardo Sontag, como el sonido es un sistema LIT continuo UBIBO, sí se señaló como al tratar este sistema/comportamiento como tal, se obtienen resultados experimentalmente favorables, lo cual se ve reflejado en la efectividad de los filtros acústicos HRTF.

En el Capítulo 4, buscando responder a la pregunta (vii) para el caso del sistema auditivo humano, se abordó el proceso de audición con énfasis en las transducciones que sufre el sonido a través de los primeros tres sectores del sistema auditivo. Desde un punto de vista puramente teórico, se planteó dicho proceso como un conjunto de sistemas-comportamientos conectados en cascada (Tabla 4.2 y Figura 4.14). Posteriormente, se expuso como la obra de Richard Lyon [23], apoyándose fuertemente en la teoría del con-

trol y los sistemas LIT, ya busca implementar modelos que buscan simular el proceso de audición humana. Si bien escapó de la tesis entrar en los detalles de los modelos planteados por Lyon, se dio una definición conjuntista de la imagen auditiva (ver (4.19)) y se dio un esbozo del sistema *machine hearing*.

En el Capítulo 5 se buscó dar respuesta a las preguntas (viii) y (ix). Con base en los capítulos precedentes, se discutieron las pistas que el SNCA toma en cuenta para realizar la localización, su procedencia, modo de operación, así como su justificación fisiológica a nivel del tronco encefálico. Se hizo énfasis en como las HRTFs han ayudado a comprender el proceso de localización, y como estas evidencian que el SNCA (de alguna forma) es capaz de reconocer patrones que solo se hacen evidentes en el dominio de la frecuencia. Finalmente, se presentó una implementación de un modelo en MaxMSP, que busca simular el comportamiento de HRTFs para el plano horizontal. Las pistas DTI se pudieron implementar de manera directa mediante un sistema de retrasos de señal. Por otra parte, para modelar e implementar las pistas DII y espectrales se utilizaron HRTFs capturadas en una cámara anecoica, sin embargo no fue necesario conocer la función de transferencia explícita ni sus coeficientes, únicamente con la gráfica de la respuesta en frecuencia fue posible modelar el filtro correspondiente a cada dirección con ayuda de filtros *peaknotch* conectados en cascada. El modelo se puso a prueba, y los resultados se resumen en las figuras 5.24 y 5.25. Se sugieren los siguientes mejoramientos al modelo (en cuanto a efectividad y reducción de confusiones frente-espalda): (1) cambiar el parámetro de distancia interaural a la personal de quien use la aplicación, (2) usar una fórmula mejorada para el DTI (por ejemplo la de [141]), (3) utilizar el método de escalamiento de Middlebrooks en los filtros implementados [133], y (4) añadir más filtros y sub-parches con direcciones asociadas para tener mejor resolución.

Comentarios finales y trabajo futuro

Más que profundizar en un teorema o resultado matemático, esta tesis buscó documentar relaciones importantes en un conjunto de conceptos propios de la teoría matemática del control. Considero que el trabajo monográfico presentado en el Capítulo 2 de esta tesis, es un material útil para cualquier persona que busque una introducción a la teoría del control y los sistemas LIT desde un punto de vista teórico-matemático.

En cuanto a todo lo mencionado en los capítulos 3, 4 y 5. En la introducción se mencionó como esta tesis nace de buscar comprender las funciones de transferencia acústica referidas a la cabeza. Inmediatamente se observó como la teoría de los sistemas LIT era la base sobre la cual se apoyaba la captura de estas funciones, y conforme la investigación siguió su curso, se observó como la teoría del control y los sistemas LIT proporciona un cuerpo teórico apropiado para poder comprender y relacionar conceptos de disciplinas que en principio son de naturaleza muy distinta.

Al menos un par de veces en su obra, Lyon enfatiza que “para hacer un buen filtro digital, el modelo debe estar en términos de polos y ceros, o ser convertible a dicha descripción, o aproximarse a dicha descripción” [23, p. 245]. “Para que las etapas sean implementables en circuitos o en tecnología digital, deben expresarse en términos de funciones de transferencia racionales, o polos y ceros” [23, p. 281]. El concepto de función de transferencia es de capital importancia en la ingeniería e informática, lo interesante es que, desde el enfoque matemático del sistema de definiciones que propone Eduardo Sontag [30], se puede ver como las funciones de transferencia provienen de ecuaciones

diferenciales lineales e invariantes en el tiempo que modelan un sistema (A, B, C) .

Respecto posibles trabajos o investigaciones futuras, se tienen distintos caminos a seguir y problemas a atacar. En primer lugar, la teoría matemática del control por sí sola es un campo muy rico que aún está en desarrollo, por lo que siempre es posible refinar y ahondar en esta teoría. En cuanto a la aplicación de la teoría de sistemas LIT al fenómeno físico del sonido, un problema que no se resolvió en esta tesis, fue justificar (desde el sistema de definiciones de Eduardo Sontag) como el sonido (cuando la amplitud no rebasa un umbral), es un sistema o comportamiento LIT continuo. En cuanto al proceso de audición humana, se mostró que aún queda mucho por descubrir, este es un desafío que requiere de la cooperación y el trabajo de distintas disciplinas, entre ellas la matemática, que busca abstraer y modelar los procesos involucrados. Por otra parte, el modelado, captura, implementación e interpolación de HRTFs son problemas aún latentes que atraviesan distintas disciplinas. La dificultad yace en que la efectividad y generación de las HRTFs dependen fuertemente de los rózagos anatómicos de cada persona y el punto desde donde se capturan.

Apéndice A

Apéndice auxiliar para demostraciones

A.1. Demostraciones del Capítulo 2

Lema A.1.1. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ medible, sea $W \subseteq \mathbb{R}^m$ abierto. Si $f : \Omega \rightarrow W$ es medible, y $g : W \rightarrow \mathbb{R}^p$ es continua, entonces $g \circ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$ es medible [59, Ej. 7.5.3]. $\lrcorner$

Prueba. Sea U abierto en $\mathbb{R}^p$. Como g es continua, se tiene que $g^{-1}(U)$ es abierto en W , y como f es medible se tiene que $f^{-1}(g^{-1}(U)) = (g \circ f)^{-1}(U)$ es medible en Ω . $\square$

Proposición A.1.2. [p. 14] Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ medible, y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ con $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$, entonces f es medible si y solo si $f_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es medible para todo $i \in \overline{m}$ [59, Ej. 7.5.2]. $\lrcorner$

Prueba. $\Rightarrow$) Supóngase que $f = (f_1, \dots, f_m)$ es medible y sea $i \in \overline{m}$. La función proyección en la i -ésima variable $\pi_i : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $\pi_i(x_1, \dots, x_i, \dots, x_m) = x_i$, es continua, pues para cualquier $(a, b) \subseteq \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, se tiene que $\pi_i^{-1}(a, b) = \mathbb{R} \times \dots \times (a, b) \times \dots \times \mathbb{R}$ es abierto en $\mathbb{R}^m$ donde (a, b) está en el i -ésimo factor del producto cartesiano. Por lo tanto, por el Lema A.1.1, se tiene que $f_i = \pi_i \circ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es medible, y como $i \in \overline{m}$ fue arbitraria, se tiene que f_i es medible para toda $i \in \overline{m}$.

$\Leftarrow$) Ahora supóngase que f_i es medible para toda $i \in \overline{m}$. Sea U abierto en $\mathbb{R}^n$, entonces $U = \bigcup_{j \in I} B_j$ [59, Lema 7.4.10], donde $|I| \leq |\mathbb{N}|$, $B_j = \prod_{i=1}^m (a_i^j, b_i^j)$, con $a_i^j, b_i^j \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ y $a_i^j < b_i^j$ para todo $i \in \overline{m}$ y todo $j \in I$. Se asegura que

$$f^{-1} \left(\prod_{i=1}^m (a_i^j, b_i^j) \right) = \bigcap_{i=1}^m f_i^{-1}(a_i^j, b_i^j) \quad \forall j \in I. \quad (\text{A.1})$$

Ya que, por un lado

$$\begin{aligned} x \in f^{-1} \left(\prod_{i=1}^m (a_i^j, b_i^j) \right) &\Rightarrow f(x) \in \prod_{i=1}^m (a_i^j, b_i^j) \Rightarrow \pi_i(f(x)) \in \pi_i \left(\prod_{i=1}^m (a_i^j, b_i^j) \right) = (a_i^j, b_i^j) \\ &\Rightarrow f_i(x) = (\pi_i \circ f)(x) \in (a_i^j, b_i^j) \quad \forall i \in \overline{m} \Rightarrow x \in f_i^{-1}(a_i^j, b_i^j) \quad \forall i \in \overline{m} \Rightarrow x \in \bigcap_{i=1}^m f_i^{-1}(a_i^j, b_i^j), \end{aligned}$$

y por otro lado

$$\begin{aligned} x \in \bigcap_{i=1}^m f_i^{-1}(a_i^j, b_i^j) &\Rightarrow x \in f_i^{-1}(a_i^j, b_i^j) \forall i \in \overline{m} \Rightarrow f_i(x) \in (a_i^j, b_i^j) \forall i \in \overline{m} \\ &\Rightarrow f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x)) \in \prod_{i=1}^m (a_i^j, b_i^j) \Rightarrow x \in f^{-1} \left(\prod_{i=1}^m (a_i^j, b_i^j) \right). \end{aligned}$$

Como $j \in I$ fue arbitraria, se tiene que en efecto (A.1) se cumple, y así

$$\bigcup_{i \in I} \bigcap_{j=1}^m f_i^{-1}(a_i^j, b_i^j) = \bigcup_{i \in I} f^{-1} \left(\prod_{j=1}^m (a_i^j, b_i^j) \right) = f^{-1} \left(\bigcup_{j \in I} \prod_{i=1}^m (a_i^j, b_i^j) \right) = f^{-1} \left(\bigcup_{j \in I} B_j \right) = f^{-1}(U).$$

Solo queda notar que $\bigcap_{i=1}^m f_i^{-1}(a_i^j, b_i^j)$ es medible para cada $j \in I$, pues es intersección finita de conjuntos que son medibles por hipótesis, de modo que $f^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} \bigcap_{j=1}^m f_i^{-1}(a_i^j, b_i^j)$, es decir, $f^{-1}(U)$ es unión a lo más numerable de conjuntos medibles y por lo tanto es medible (todas estas son propiedades de σ -álgebra). $\square$

Los siguientes resultados servirán para probar la Proposición A.1.5.

Teorema A.1.3. Si V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con $\dim(V) < \infty$, y $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ normas de V , entonces $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son equivalentes, es decir, siempre existen $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_{>0}$, tales que

$$c_1 \|v\|_2 \leq \|v\|_1 \leq c_2 \|v\|_2, \quad \forall v \in V \quad [55, \text{Teo. 4.19}]. \quad \lrcorner$$

Lema A.1.4. Sean V, W espacios vectoriales normados con $\dim(V) < \infty$. Si $\lambda \in \mathcal{L}(V, W) := \{T : V \rightarrow W \mid T \text{ es lineal}\}$, entonces λ es Lipschitz continua [55, Ej. 4.42 (c)]. $\lrcorner$

Prueba. Sean $(V, \|\cdot\|_V)$ y $(W, \|\cdot\|_W)$ como el enunciado y sea $n = \dim(V)$. Sean $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \subset V$ y $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\} \subset W$ bases. Sea $v = \sum_{i=1}^n x_i^v \alpha_i \in V$ y $\lambda \in \mathcal{L}(V, W)$, luego

$$\begin{aligned} \|\lambda(v)\|_W &= \left\| \lambda \left(\sum_{i=1}^n x_i^v \alpha_i \right) \right\|_W = \left\| \sum_{i=1}^n x_i^v \lambda(\alpha_i) \right\|_W && \text{(linealidad de } \lambda) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \|x_i^v \lambda(\alpha_i)\|_W = \sum_{i=1}^n |x_i^v| \|\lambda(\alpha_i)\|_W && \text{(propiedad de la norma)} \\ &= \sum_{i=1}^n \|v\|_1 \|\lambda(\alpha_i)\|_W \end{aligned}$$

donde $\|\cdot\|_1$ es la función dada por $\left\| \sum_{i=1}^n x_i^v \alpha_i \right\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i^v|$, que es una norma en V , y por el Teorema A.1.3, esta es equivalente a la norma $\|\cdot\|_V$, así, existe $c \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $\sum_{i=1}^n \|v\|_1 \|\lambda(\alpha_i)\|_W \leq \|v\|_V \sum_{i=1}^n c \|\lambda(\alpha_i)\|_W$. Por lo tanto, definiendo $M := \sum_{i=1}^n c \|\lambda(\alpha_i)\|_W$ que no depende de v , se ha mostrado que $\|\lambda(v)\|_W \leq M \|v\|_V$, dado que $v \in V$ fue arbitrario, esto ocurre para todo $v \in V$, en particular, $\|\lambda(x - y)\|_W \leq M \|x - y\|_V$ para cualesquiera $x, y \in V$, lo que prueba que λ es Lipschitz continua. $\square$

Proposición A.1.5. [p. 15] Sean V y W espacios vectoriales normados sobre $\mathbb{R}$. Si $\dim(V) = \dim(W) < \infty$, entonces existe una equivalencia $\varphi : V \rightarrow W$ que es además un isomorfismo lineal [55, Ej. 4.42 (a)]. $\lrcorner$

Prueba. Sean $(V, \|\cdot\|_V)$ y $(W, \|\cdot\|_W)$ espacios vectoriales normados sobre $\mathbb{R}$ con $\dim(V) = n = \dim(W)$. Sean $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \subset V$ y $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\} \subset W$ bases. Cada $v \in V$ se descompone de manera única como la suma $v = \sum_{i=1}^n x_i^v \alpha_i$, con $x_i^v \in \mathbb{R}$, $i \in \bar{n}$ únicamente determinados por v . De la misma forma, para todo $w \in W$ se tiene que $w = \sum_{i=1}^n y_i^w \beta_i$, con $y_i^w \in \mathbb{R}$, $i \in \bar{n}$ únicamente determinados por w . Por lo anterior se puede definir la función

$$\varphi : V \rightarrow W, \quad \sum_{i=1}^n x_i^v \alpha_i \mapsto \sum_{i=1}^n x_i^v \beta_i.$$

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y $u, v \in V$, entonces

$$\begin{aligned} \varphi(av + bu) &= \varphi\left(a\left(\sum_{i=1}^n x_i^v \alpha_i\right) + b\left(\sum_{i=1}^n x_i^u \alpha_i\right)\right) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n (ax_i^v + bx_i^u) \alpha_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^n (ax_i^v + bx_i^u) \beta_i = a \sum_{i=1}^n x_i^v \beta_i + b \sum_{i=1}^n x_i^u \beta_i \\ &= a\varphi\left(\sum_{i=1}^n x_i^v \alpha_i\right) + b\varphi\left(\sum_{i=1}^n x_i^u \alpha_i\right) = a\varphi(v) + b\varphi(u). \end{aligned}$$

Por lo que φ es lineal.

Por otra parte φ es sobreyectiva, pues si $w \in W$, entonces $w = \sum_{i=1}^n y_i^w \beta_i$, y tomando $v \in V$ como $v = \sum_{i=1}^n y_i^w \alpha_i$, se tiene que $\varphi(v) = w$. Como φ es lineal y sobreyectiva también es inyectiva y por lo tanto es biyectiva, con inversa (lineal)

$$\varphi^{-1} : W \rightarrow V, \quad \sum_{i=1}^n y_i^w \beta_i \mapsto \sum_{i=1}^n y_i^w \alpha_i.$$

Por todo lo anterior, los espacios vectoriales V y W son isomorfos.

Finalmente, como φ y φ^{-1} son lineales con la dimensión de su dominio finita, se tiene que son Lipschitz continuas (Lema A.1.4), lo que prueba que φ también es una equivalencia. $\square$

Proposición A.1.6. [p. 18] El PVI en (2.6) tiene solución única en el intervalo $[\sigma, \infty) \subset \mathbb{R}$. $\lrcorner$

Prueba. Sea $x_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$ fijo, e $\mathcal{I} = \mathbb{R}$.

Primero se tiene que

$$\begin{aligned} &a_{ij}(t), \nu_i(t) \text{ son medibles para todo } i, j \in \bar{n} && \text{(hipótesis)} \\ \Rightarrow \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j^0 + \nu_i(t) &\text{ es medible para todo } i \in \bar{n} && \text{(Lema 2.1.4)} \end{aligned}$$

por lo tanto, la función

$$A(\cdot)x_0 + \nu(\cdot) : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto \left(\sum_{j=1}^n a_{1j}(t)x_j^0 + \nu_1(t), \dots, \sum_{j=1}^n a_{nj}(t)x_j^0 + \nu_n(t) \right),$$

es medible. La arbitrariedad de x_0 permite asegurar que se cumple la condición en (2.3).

Por otra parte, si $t_0 \in \mathcal{I}$ es fija, la función

$$A(t_0)(\cdot) + \nu(t_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto \left(\sum_{j=1}^n a_{1j}(t_0)x_j, \dots, \sum_{j=1}^n a_{nj}(t_0)x_j \right),$$

es continua, pues usando la caracterización de continuidad mediante sucesiones convergentes [55, Teo. 3.33], si (x_k) es una sucesión en $\mathbb{R}^n$ tal que $x_k \rightarrow c$, con $x_k = (x_1^k, \dots, x_n^k)$ y $c = (c_1, \dots, c_n)$, entonces

$$\begin{aligned} x_{j_0}^k \rightarrow c_{j_0} \quad \forall j_0 \in \bar{n} &\Rightarrow \sum_{j=1}^n a_{ij}(t_0)x_j^k + \nu_j(t_0) \rightarrow \sum_{j=1}^n a_{ij}(t_0)c_j + \nu_j(t_0) \quad \forall i \in \bar{n} \\ &\Rightarrow A(t_0)x_k + \nu(t_0) \rightarrow A(t_0)c + \nu(t_0), \end{aligned}$$

lo que prueba que en efecto $A(t_0)(\cdot) + \nu(t_0)$ es continua, y la arbitrariedad de t_0 permite asegurar que se cumple la condición en (2.4).

Por otra parte, como $a_{ij} \in L_{loc}^\infty(\mathcal{I}) \subset L_{loc}^1(\mathcal{I})$ (Observación 2.1.8), $i, j \in \bar{n}$, se define

$$m_A : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad t \mapsto \max_{i,j \in \bar{n}} |a_{ij}(t)|.$$

Por un lado $m_A(t) \in L_{loc}^1(\mathcal{I})$ y además $|a_{ij}(t)| < m_A(t)$ para toda $t \in \mathcal{I}$ y toda $i, j \in \bar{n}$.

Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ con $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ y $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ dada por $\alpha(t) = n^{\frac{1}{2}} m_A(t) \in L_{loc}^1(\mathcal{I}, \mathbb{R}_{\geq 0})$, se observa que

$$\begin{aligned} \|A(t)x + \nu(t) - (A(t)y + \nu(t))\| &= \|A(t)x - A(t)y\| = \|A(t)(x - y)\| \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}(t)(x_j - y_j) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq n^{\frac{1}{2}} m_A(t) \|x - y\| = \alpha(t) \|x - y\| \quad \forall t \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

por lo que se cumple la hipótesis de ser Lipschitz continua global de la Proposición 2.1.16.

Por último, definiendo $\beta : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, donde $\beta(t) = n^{\frac{1}{2}} \left| \sum_{j=1}^n m_A(t)x_j^0 + \nu_j(t) \right| \in L_{loc}^1(\mathcal{I})$ (localmente integrable, pues es suma de funciones localmente integrables), se tiene que

$$\begin{aligned} a_{ij}(t) + \nu_j(t) &\leq m_A(t) + \nu_j(t) \quad \forall t \in \mathcal{I}, \quad \forall i, j \in \bar{n} \\ &\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j^0 + \nu_j(t) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(n \left(\sum_{j=1}^n m_A(t)x_j^0 + \nu_j(t) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \forall t \in \mathcal{I} \\ &\Rightarrow \|A(t)x_0 + \nu(t)\| \leq \beta(t) \quad \forall t \in \mathcal{I}. \end{aligned}$$

Por lo tanto se cumple la hipótesis 2 del Teorema 2.1.15.

Se ha mostrado que (2.6) cumple las hipótesis del Teorema 2.1.15, y el caso particular de la condición de ser globalmente Lipschitz continua, por lo tanto, por la Proposición 2.1.16 se puede concluir que el PVI en (2.6) tiene solución $\xi : [\sigma, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ única y maximal. $\square$

Proposición A.1.7. [p. 19] El PVI descrito en (2.9):

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t), \quad X(\sigma) = I$$

tiene solución única en el intervalo $[\sigma, \infty) \subset \mathbb{R}$. $\lrcorner$

Prueba. Si V es un espacio vectorial, entonces $V^{n^2} \cong M_{n \times n}(V)$, con el isomorfismo lineal

$$\begin{aligned} \varphi : V^{n^2} &\xrightarrow{\sim} M_{n \times n}(V) \\ (u_1, u_2, \dots, u_n, u_{n+1}, u_{n+2}, \dots, u_{2n}, \dots, u_{n^2-n+1}, u_{n^2-n+2}, \dots, u_{n^2}) &\mapsto \begin{pmatrix} u_1 & u_{n+1} & \dots & u_{n^2-n+1} \\ u_2 & u_{n+2} & \dots & u_{n^2-n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_n & u_{2n} & \dots & u_{n^2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Con esto último en cuenta, se considera la solución del siguiente PVI en $\mathbb{R}^{n^2}$

$$\dot{\zeta}(t) = B(t)\zeta(t), \quad \zeta(\sigma) = \varphi^{-1}(I), \quad \text{donde } B = (b_{ij}) := \begin{pmatrix} A & \dots & \hat{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{0} & \dots & A \end{pmatrix}, \quad (\text{A.2})$$

es decir, B se compone de las matrices $A \in M_{n \times n}(L_{loc}^\infty(\mathbb{R}))$, localizadas en la diagonal, y donde los lugares restantes son ocupados por la matriz $\hat{0} \in M_{n \times n}(L_{loc}^\infty(\mathbb{R}))$, donde cada una de sus entradas es la función constante cero. Como $B \in M_{n^2 \times n^2}(L_{loc}^\infty(\mathbb{R}))$, por la Proposición A.1.6, existe $\zeta : [\sigma, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^{n^2}$ solución única de (A.2) con la forma $\zeta(t) = (\zeta_1(t), \zeta_2(t), \dots, \zeta_{n^2-n+1}(t), \zeta_{n^2-n+2}(t), \dots, \zeta_{n^2}(t))$.

B se definió de modo que $b_{ij} = 0$ cuando $i \in \{kn+1, \dots, kn+n\}$ y $j \notin \{kn+1, \dots, kn+n\}$ para cada $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. También se tiene que $b_{ij} = a_{i_0 j_0}$ cuando $i_0, j_0 \in \bar{n}$, $i, j \in \{kn+1, \dots, kn+n\}$ y son tales que $i = kn + i_0$ y $j = kn + j_0$, para cada $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, entonces

$$\begin{aligned} B\zeta &= \left(\sum_{j=1}^n b_{1j}\zeta_j, \dots, \sum_{j=1}^n b_{nj}\zeta_j, \sum_{j=n+1}^{2n} b_{n+1j}\zeta_j, \dots, \sum_{j=n+1}^{2n} b_{2nj}\zeta_j, \right. \\ &\quad \left. \dots, \sum_{j=n^2-n+1}^{n^2} b_{n^2-n+1j}\zeta_j, \dots, \sum_{j=n^2-n+1}^{n^2} b_{n^2j}\zeta_j \right) \\ &= \left(\sum_{j=1}^n a_{1j}\zeta_j, \dots, \sum_{j=1}^n a_{nj}\zeta_j, \sum_{j=1}^n a_{1j}\zeta_{n+j}, \dots, \sum_{j=1}^n a_{nj}\zeta_{n+j}, \dots, \sum_{j=1}^n a_{1j}\zeta_{n^2-n+j}, \right. \\ &\quad \left. \dots, \sum_{j=1}^n a_{nj}\zeta_{n^2-n+j} \right) \end{aligned}$$

por lo que

$$\varphi(B\zeta) = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}\zeta_j & \cdots & \sum_{j=1}^n a_{1,j}\zeta_{n^2-n+j} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj}\zeta_j & \cdots & \sum_{j=1}^n a_{n,j}\zeta_{n^2-n+j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_1 & \cdots & \zeta_{n^2-n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \zeta_n & \cdots & \zeta_{n^2} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto $\varphi(B(t)\zeta(t)) = A(t)Z(t)$, donde $Z(t)$ es la matriz que multiplica a $A(t)$ en la última igualdad. Como $\zeta(t)$ es solución única de (A.2), entonces $\varphi(\zeta(t)) = Z(t)$ es solución única de $\varphi(\dot{\zeta}(t)) = \varphi(B(t)\zeta(t))$, $\varphi(\zeta(\sigma)) = \varphi(\varphi^{-1}(I))$, y así $\dot{Z}(t) = A(t)Z(t)$, $Z(\sigma) = I$. Por lo tanto $Z(t)$ es la solución para el PVI en (2.9) y además es única. $\square$

Los siguientes tres lemas servirán para probar la Proposición A.1.11

Lema A.1.8. Para todo $\tau, \sigma, \mu \in \mathbb{R}$, la solución fundamental Φ cumple:

(a) $\Phi(\tau, \mu)\Phi(\mu, \sigma) = \Phi(\tau, \sigma)$.

(b) $\Phi(\sigma, \mu)^{-1} = \Phi(\mu, \sigma)$ [30, Ej. C.4.1. b) y c)]. $\lrcorner$

Prueba. Sean $\tau, \sigma, \mu \in \mathbb{R}$. Por lo mencionado en (2.13), se tiene que

$$\Phi(\mu, \sigma) = [\hat{\Phi}(\mu, \sigma, e_1) \ \hat{\Phi}(\mu, \sigma, e_2) \ \cdots \ \hat{\Phi}(\mu, \sigma, e_n)],$$

donde $\hat{\Phi}(\mu, \sigma, e_i)$ es la solución de $\dot{\zeta}(t) = A(t)\zeta(t)$, $\zeta(\sigma) = e_i$ evaluada en μ para todo $i \in \bar{n}$. Entonces, la i -ésima columna de la matriz $\Phi(\tau, \mu)\Phi(\mu, \sigma)$ es $\Phi(\tau, \mu)\hat{\Phi}(\mu, \sigma, e_i)$, que por el Corolario 2.1.20 corresponde a la solución del PVI de la forma:

$$\dot{\zeta}(t) = A(t)\zeta(t), \ \zeta(\mu) = \hat{\Phi}(\mu, \sigma, e_i) \tag{A.3}$$

evaluada en el punto τ .

Por otra parte, nuevamente por (2.13) se tiene que $\Phi(\tau, \sigma) = [\hat{\Phi}(\tau, \sigma, e_1) \ \cdots \ \hat{\Phi}(\tau, \sigma, e_n)]$, es decir, $\hat{\Phi}(\tau, \sigma, e_i)$ es la i -ésima columna de la matriz $\Phi(\tau, \sigma)$ que corresponde a la solución del PVI en (A.3) evaluada en el punto τ , así, por la unicidad de la solución en (A.3) y la arbitrariedad de $i \in \bar{n}$, se concluye que

$$\begin{aligned} \Phi(\tau, \mu)\hat{\Phi}(\mu, \sigma, e_i) &= \hat{\Phi}(\tau, \sigma, e_i) \quad \forall i \in \bar{n} \\ \iff [\Phi(\tau, \mu)\hat{\Phi}(\mu, \sigma, e_1) \ \Phi(\tau, \mu)\hat{\Phi}(\mu, \sigma, e_2) \ \cdots \ \Phi(\tau, \mu)\hat{\Phi}(\mu, \sigma, e_n)] \\ &= [\hat{\Phi}(\tau, \sigma, e_1) \ \hat{\Phi}(\tau, \sigma, e_2) \ \cdots \ \hat{\Phi}(\tau, \sigma, e_n)] \\ \iff \Phi(\tau, \mu)\Phi(\mu, \sigma) &= \Phi(\tau, \sigma). \end{aligned}$$

Lo que prueba (a). Para probar (b), basta usar el caso particular de (a) cuando $\tau = \sigma$:

$$\begin{aligned} \Phi(\tau, \mu)\Phi(\mu, \sigma) &= \Phi(\tau, \sigma) \quad \forall \tau, \sigma, \mu \in \mathbb{R} \Rightarrow \Phi(\sigma, \mu)\Phi(\mu, \sigma) = \Phi(\sigma, \sigma) = I \quad \forall \sigma, \mu \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow \Phi(\sigma, \mu)^{-1} &= \Phi(\mu, \sigma) \quad \forall \sigma, \mu \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad \square$$

Lema A.1.9. Si $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ con $A, B \in M_{n \times n}(\mathcal{D}^*(\mathbb{R}))$, con $\mathcal{D}^*(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es diferenciable c.d.}\}$, entonces

$$\frac{d}{dt}A(t)B(t) = \dot{A}(t)B(t) + A(t)\dot{B}(t) \quad [63, \text{Prob. 3.18}]. \quad \lrcorner$$

Prueba.

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}A(t)B(t) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^n a_{1j}(t)b_{j1}(t) & \dots & \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^n a_{1j}(t)b_{jn}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^n a_{nj}(t)b_{j1}(t) & \dots & \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^n a_{nj}(t)b_{jn}(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n \frac{d}{dt} a_{1j}(t)b_{j1}(t) & \dots & \sum_{j=1}^n \frac{d}{dt} a_{1j}(t)b_{jn}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{j=1}^n \frac{d}{dt} a_{nj}(t)b_{j1}(t) & \dots & \sum_{j=1}^n \frac{d}{dt} a_{nj}(t)b_{jn}(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n \frac{d(a_{1j}(t))}{dt} b_{j1}(t) + a_{1j}(t) \frac{d(b_{j1}(t))}{dt} & \dots & \sum_{j=1}^n \frac{d(a_{1j}(t))}{dt} b_{jn}(t) + a_{1j}(t) \frac{d(b_{jn}(t))}{dt} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{j=1}^n \frac{d(a_{nj}(t))}{dt} b_{j1}(t) + a_{nj}(t) \frac{d(b_{j1}(t))}{dt} & \dots & \sum_{j=1}^n \frac{d(a_{nj}(t))}{dt} b_{jn}(t) + a_{nj}(t) \frac{d(b_{jn}(t))}{dt} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n \frac{d(a_{1j}(t))}{dt} b_{j1}(t) & \dots & \sum_{j=1}^n \frac{d(a_{1j}(t))}{dt} b_{jn}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{j=1}^n \frac{d(a_{nj}(t))}{dt} b_{j1}(t) & \dots & \sum_{j=1}^n \frac{d(a_{nj}(t))}{dt} b_{jn}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}(t) \frac{d(b_{j1}(t))}{dt} & \dots & \sum_{j=1}^n a_{1j}(t) \frac{d(b_{jn}(t))}{dt} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj}(t) \frac{d(b_{j1}(t))}{dt} & \dots & \sum_{j=1}^n a_{nj}(t) \frac{d(b_{jn}(t))}{dt} \end{pmatrix} \\ &= \dot{A}(t)B(t) + A(t)\dot{B}(t). \quad \square \end{aligned}$$

Lema A.1.10. La solución fundamental Φ cumple que $(\Phi(t, \sigma)^{-1})' = -\Phi(\sigma, t)A(t)$ para todo $\sigma \in \mathbb{R}$. $\lrcorner$

Prueba. Por los Lemas A.1.9 y A.1.8, primero se tiene que $(\Phi(t, \sigma)^{-1})' = \dot{\Phi}(\sigma, t)$, entonces basta con ver que $\dot{\Phi}(\sigma, t) = -\Phi(\sigma, t)A(t)$, esto último se verifica:

$$\begin{aligned} & \Phi(\sigma, t)\Phi(t, \sigma) = I \Rightarrow (\Phi(\sigma, t)\Phi(t, \sigma))' = 0 \\ & \Rightarrow \dot{\Phi}(\sigma, t)\Phi(t, \sigma) + \Phi(\sigma, t)\dot{\Phi}(t, \sigma) = 0 \\ & \Rightarrow \dot{\Phi}(\sigma, t)\Phi(t, \sigma)\Phi(\sigma, t) = -\Phi(\sigma, t)A(t)\Phi(t, \sigma)\Phi(\sigma, t) \\ & \Rightarrow \dot{\Phi}(\sigma, t)\Phi(t, \sigma) \xrightarrow{I} I = -\Phi(\sigma, t)A(t)\Phi(t, \sigma) \xrightarrow{I} I. \quad \square \end{aligned}$$

Proposición A.1.11. [p. 20] La solución del PVI lineal no homogéneo:

$$\dot{\xi}(t) = A(t)\xi(t) + \nu(t), \quad \xi(\sigma_0) = x_0, \quad (\text{A.4})$$

es

$$\xi(t) = \Phi(t, \sigma_0)x_0 + \int_{\sigma_0}^t \Phi(t, s)\nu(s) ds \quad \lrcorner \quad (\text{A.5})$$

Prueba. Para llegar a la solución hay dos alternativas, la primera es usar que $\Phi(\sigma_0, t) = \Phi(t, \sigma_0)^{-1}$ es un factor de integración de la ecuación, es decir, considerando $\xi(t)$ como la solución de (A.4):

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= A(t)\xi(t) + \nu(t) \\ \Rightarrow \Phi(\sigma_0, t)\dot{\xi}(t) &= \Phi(\sigma_0, t)(A(t)\xi(t) + \nu(t)) \\ \Rightarrow -\Phi(\sigma_0, t)A(t)\xi(t) + \Phi(\sigma_0, t)\dot{\xi}(t) &= \Phi(\sigma_0, t)\nu(t) \\ \Rightarrow (\Phi(t, \sigma_0)^{-1})' \xi(t) + \Phi(\sigma_0, t)\dot{\xi}(t) &= \Phi(\sigma_0, t)\nu(t) && (\text{Lema A.1.10}) \\ \Rightarrow (\Phi(t, \sigma_0)^{-1}\xi(t))' &= \Phi(\sigma_0, t)\nu(t) && (\text{Lema A.1.9}) \\ \Rightarrow \int_{\sigma_0}^t (\Phi(\sigma_0, s)\xi(s))' ds &= \int_{\sigma_0}^t \Phi(\sigma_0, s)\nu(s) ds && (\text{integrando de } \sigma_0 \text{ a } t) \\ \Rightarrow \Phi(\sigma_0, t)\xi(t) - \Phi(\sigma_0, \sigma_0)\xi(\sigma_0) &= \int_{\sigma_0}^t \Phi(\sigma_0, s)\nu(s) ds && (2^{\text{do}} \text{ TFC}) \\ \Rightarrow \Phi(t, \sigma_0)\Phi(\sigma_0, t)\xi(t) &= \Phi(t, \sigma_0)x_0 + \Phi(t, \sigma_0) \int_{\sigma_0}^t \Phi(\sigma_0, s)\nu(s) ds \\ \Rightarrow \Phi(t, t) \xrightarrow{I} \xi(t) &= \Phi(t, \sigma_0)x_0 + \int_{\sigma_0}^t \Phi(t, \sigma_0)\Phi(\sigma_0, s)\nu(s) ds && (\text{Lema A.1.8}) \\ \Rightarrow \xi(t) &= \Phi(t, \sigma_0)x_0 + \int_{\sigma_0}^t \Phi(t, s)\nu(s) ds. && (\text{Lema A.1.8}) \end{aligned}$$

Llegando a (A.5).

La segunda alternativa es mediante la restricción o condición¹

$$\xi(t) = \Phi(t, \sigma_0)\eta(t), \quad \eta(\sigma_0) = x_0. \quad (\text{A.6})$$

La solución en este caso es como sigue: de (A.4) y (A.6) ocurre que $A(t)\xi(t) + \nu(t) = \dot{\xi}(t) = (\Phi(t, \sigma_0)\eta(t))'$, y también por el Lema A.1.8, se tiene que $\eta(t) = \Phi(t, \sigma_0)^{-1}\xi(t) = \Phi(\sigma_0, t)\xi(t)$, por lo tanto

$$\begin{aligned} A(t)\xi(t) + \nu(t) &= (\Phi(t, \sigma_0)\eta(t))' = \dot{\Phi}(t, \sigma_0)\eta(t) + \Phi(t, \sigma_0)\dot{\eta}(t) = A(t)\xi(t) + \Phi(t, \sigma_0)\dot{\eta}(t) \\ \Rightarrow \Phi(t, \sigma_0)\dot{\eta}(t) &= \nu(t) \Rightarrow \dot{\eta}(t) = \Phi(t, \sigma_0)^{-1}\nu(t) \Rightarrow \dot{\eta}(t) = \Phi(\sigma_0, t)\nu(t) \\ \Rightarrow \int_{\sigma_0}^t \dot{\eta}(s) ds &= \int_{\sigma_0}^t \Phi(\sigma_0, s)\nu(s) ds \Rightarrow \eta(t) = x_0 + \int_{\sigma_0}^t \Phi(\sigma_0, s)\nu(s) ds. \end{aligned}$$

De esta última igualdad y de (A.6) se tiene que $\xi(t) = \Phi(t, \sigma_0) \left(x_0 + \int_{\sigma_0}^t \Phi(\sigma_0, s)\nu(s) ds \right)$,

¹Que en principio parece una suposición arbitraria (se asume que una solución de (A.4) tiene la forma $\Phi(t, \sigma_0)\eta(t)$ para alguna función $\eta(t)$), sin embargo, esta suposición encontrada de manera frecuente en la literatura (ver [63, Sec. 3.4], [64, Sec. 11] o [65, Sec. 7.9], por ejemplo) también lleva a la solución. La condición en (A.6) se denomina “variación de constantes” [63, p. 63].

llegando a la misma fórmula.

La fórmula se puede verificar teniendo en cuenta las propiedades ya expuestas de Φ , la regla de la derivada para el producto de matrices y el 1^{er} teorema fundamental del cálculo:

$$\begin{aligned}\dot{\xi}(t) &= \frac{d}{dt} \left(\Phi(t, \sigma_0)x_0 + \int_{\sigma_0}^t \Phi(t, s)\nu(s) ds \right) = A(t)\Phi(t, \sigma_0)x_0 + \frac{d}{dt} \left(\Phi(t, \sigma_0) \int_{\sigma_0}^t \Phi(\sigma_0, s)\nu(s) ds \right) \\ &= A(t)\Phi(t, \sigma_0)x_0 + A(t) \int_{\sigma_0}^t \Phi(t, s)\nu(s) ds + \nu(t) \\ &= A(t) \left(\Phi(t, \sigma_0)x_0 + \int_{\sigma_0}^t \Phi(t, s)\nu(s) ds \right) + \nu(t) = A(t)\xi(t) + \nu(t).\end{aligned}\quad \square$$

Proposición A.1.12. [p. 20] Si $X^k(t)$ es la k -ésima iteración de Picard del PVI en (2.9), dada por la sucesión recursiva: $X^0(t) = I$, $X^{k+1}(t) = I + \int_{\sigma}^t A(s)X^{k-1}(s) ds$, entonces

$$\sum_{i=0}^k \mathfrak{I}_i(t) = X^k(t) \text{ para todo } k \in \mathbb{N}_{>0}, \text{ donde } \mathfrak{I}_0(t) := I \text{ y}$$

$$\mathfrak{I}_k(t) := \int_{\sigma}^t \int_{\sigma}^{s_1} \dots \int_{\sigma}^{s_{k-1}} A(s_1)A(s_2) \dots A(s_k) ds_k \dots ds_2 ds_1 \quad \forall k \in \mathbb{N}_{>0}. \quad (\text{A.7})$$

Prueba. Se procede por inducción. El caso base es inmediato pues $X^0(t) = I =: \mathfrak{I}_0(t)$.

La hipótesis de inducción es: $X^{k_0}(t) = \sum_{i=0}^{k_0} \mathfrak{I}_i(t) = \sum_{i=0}^{k_0-1} \mathfrak{I}_i(t) + \mathfrak{I}_{k_0}(t) = X^{k_0-1}(t) + \mathfrak{I}_{k_0}(t)$

y se debe ver que $X^{k_0+1}(t) = \sum_{i=0}^{k_0+1} \mathfrak{I}_i(t) = \sum_{i=0}^{k_0} \mathfrak{I}_i(t) + \mathfrak{I}_{k_0+1}(t) = X^{k_0}(t) + \mathfrak{I}_{k_0+1}(t)$, lo cual se verifica a continuación:

$$\begin{aligned}X^{k_0+1}(t) &= I + \int_{\sigma}^t A(s_0)X^{k_0}(s_0) ds_0 && \text{(iteración de Picard)} \\ &= I + \int_{\sigma}^t A(s_0)(X^{k_0-1}(s_0) + \mathfrak{I}_{k_0}(s_0)) ds_0 && \text{(hip. de inducción)} \\ &= X^{k_0}(t) + \int_{\sigma}^t A(s_0)\mathfrak{I}_{k_0}(s_0) ds_0 && \text{(iteración de Picard)} \\ &= X^{k_0}(t) + \int_{\sigma}^t A(s_0) \left(\int_{\sigma}^{s_0} \int_{\sigma}^{s_1} \dots \int_{\sigma}^{s_{k_0-1}} A(s_1)A(s_2) \dots A(s_{k_0}) ds_{k_0} \dots ds_2 ds_1 \right) ds_0 \\ & && \text{(Def. en (A.7))} \\ &= X^{k_0}(t) + \mathfrak{I}_{k_0+1}(t).\end{aligned}\quad \square$$

Proposición A.1.13. [p. 21] Si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, entonces, $\Phi(\tau, \sigma) = e^{(\tau-\sigma)A}$ para todo $\tau, \sigma \in \mathbb{R}$, y donde

$$e^{tA} := I + tA + \frac{t^2}{2}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \dots + \frac{t^k}{k!}A^k + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}A^k, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad [\text{30, Ej. C.4.1. e)] \perp.$$

Prueba. Sean $\tau, \sigma \in \mathbb{R}$. Primero se hace la siguiente afirmación (mini-lema):

$$\int_{\sigma}^{\tau} \int_{\sigma}^{s_1} \dots \int_{\sigma}^{s_{k-1}} 1 \, ds_k \dots ds_2 ds_1 = \frac{(\tau - \sigma)^k}{k!} \quad \forall \tau, \sigma \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}. \quad (\text{A.8})$$

La igualdad en (A.8) se verifica rápidamente por inducción. El caso base se cumple: $\int_{\sigma}^{\tau} 1 \, ds_1 = (\tau - \sigma) = \frac{(\tau - \sigma)^1}{1!}$. Para $k_0 \in \mathbb{N}$ fijo, la hipótesis de inducción es:

$$\int_{\sigma}^{\tau} \int_{\sigma}^{s_1} \dots \int_{\sigma}^{s_{k_0-1}} 1 \, ds_{k_0} \dots ds_2 ds_1 = \frac{(\tau - \sigma)^{k_0}}{k_0!}, \quad \forall \tau, \sigma \in \mathbb{R},$$

y se observa que

$$\begin{aligned} \int_{\sigma}^{\tau} \left(\int_{\sigma}^{s_1} \dots \int_{\sigma}^{s_{k_0-1}} \int_{\sigma}^{s_{k_0}} 1 \, ds_{k_0+1} ds_{k_0} \dots ds_2 \right) ds_1 &= \int_{\sigma}^{\tau} \frac{(s_1 - \sigma)^{k_0}}{k_0!} ds_1 \\ &\quad (\text{hip. de inducción}) \\ &= \frac{1}{k_0!} \int_{\sigma-\sigma}^{\tau-\sigma} u^{k_0} du = \frac{1}{k_0!} \left(\frac{u^{k_0+1}}{k_0+1} \Big|_0^{\tau-\sigma} \right) = \frac{(\tau - \sigma)^{k_0+1}}{(k_0+1)!}. \end{aligned} \quad (u = s_1 - \sigma)$$

Lo que prueba (A.8). Luego, por la definición en (A.7) y la hipótesis de que A es constante, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_k(\tau) &= \int_{\sigma}^{\tau} \int_{\sigma}^{s_1} \dots \int_{\sigma}^{s_{k-1}} \underbrace{AA \dots AA}_{k \text{ veces}} ds_k \dots ds_2 ds_1 = A^k \int_{\sigma}^{\tau} \int_{\sigma}^{s_1} \dots \int_{\sigma}^{s_{k-1}} 1 \, ds_k \dots ds_2 ds_1 \\ &= \frac{(\tau - \sigma)^k}{k!} A^k. \end{aligned} \quad (\text{Lema en (A.8)})$$

De este último resultado y de la serie de Peano-Baker en (2.16), se sigue que

$$\Phi(t, \sigma) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathfrak{J}_k(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\tau - \sigma)^k}{k!} A^k := e^{(\tau - \sigma)A}.$$

Por tanto $\Phi(t, \sigma) = e^{(\tau - \sigma)A}$ para todo $\tau, \sigma \in \mathbb{R}$, ya que σ y τ fueron arbitrarios. $\square$

§2.2

El siguiente lema servirá para probar la Prop. A.1.15.

Lema A.1.14. Si Σ es un sistema lineal de tiempo discreto, entonces para todo $\sigma, \tau \in \mathbb{Z}$, $\sigma < \tau$, la función $\phi(\tau, \sigma, \cdot, \cdot) : \mathcal{X} \times \mathcal{U}^{[\sigma, \tau)} \rightarrow \mathcal{X}$ es lineal [30, Ej. 2.4.2]. $\lrcorner$

Prueba. Sea $\Sigma = (\mathbb{Z}, \mathcal{X}, \mathcal{U}, \phi)$ un sistema lineal, y sea $\sigma \in \mathbb{Z}$. Se procede por inducción en $k \in \mathbb{N}_{>0}$, para el intervalo $[\sigma, \sigma + k)$. El caso base $k = 1$ se cumple pues $\phi(\tau, \sigma, \cdot, \cdot) = \phi(\sigma + 1, \sigma, \cdot, \cdot) := \mathcal{P}(\sigma, \cdot, \cdot)$.

Sea $k_0 \in \mathbb{N}_{>0}$ fijo. La HI es que $\phi(\sigma + k_0, \sigma, \cdot, \cdot) : \mathcal{X} \times \mathcal{U}^{[\sigma, \sigma + k_0)} \rightarrow \mathcal{X}$ es lineal.

Sean $\omega, \nu \in \mathcal{U}^{[\sigma, \sigma + k_0 + 1)}$ y $x, z \in \mathcal{X}$ y $a, b \in \mathbb{R}$. Por la hipótesis de inducción se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_0 &:= \phi(\sigma + k_0, \sigma, ax + bz, a\omega|_{\sigma}^{\sigma + k_0} + b\nu|_{\sigma}^{\sigma + k_0}) \\ &= a\phi(\sigma + k_0, \sigma, x, \omega|_{\sigma}^{\sigma + k_0}) + b\phi(\sigma + k_0, \sigma, z, \nu|_{\sigma}^{\sigma + k_0}). \end{aligned}$$

Por el axioma de semigrupo de sistema se cumple que

$$\phi(\sigma + k_0 + 1, \sigma, ax + bz, a\omega + b\nu) = \phi(\sigma + k_0 + 1, \sigma + k_0, \mathbf{x}_0, a\omega|_{\sigma+k_0}^{\sigma+k_0+1} + b\nu|_{\sigma+k_0}^{\sigma+k_0+1}). \quad (\text{A.9})$$

Ahora sean $\omega(\sigma + k_0) = u$, $\nu(\sigma + k_0) = w$, así

$$\begin{aligned} & \phi(\sigma + k_0 + 1, \sigma + k_0, \mathbf{x}_0, a\omega|_{\sigma+k_0}^{\sigma+k_0+1} + b\nu|_{\sigma+k_0}^{\sigma+k_0+1}) = \mathcal{P}(\sigma + k_0, \mathbf{x}_0, au + bw) \\ & = \mathcal{P}(\sigma + k_0, a\phi(\sigma + k_0, \sigma, x, \omega|_{\sigma}^{\sigma+k_0}) + b\phi(\sigma + k_0, \sigma, z, \nu|_{\sigma}^{\sigma+k_0}), au + bw) \\ & = a\mathcal{P}(\sigma + k_0, \phi(\sigma + k_0, \sigma, x, \omega|_{\sigma}^{\sigma+k_0}), u) + b\mathcal{P}(\sigma + k_0, \phi(\sigma + k_0, \sigma, z, \nu|_{\sigma}^{\sigma+k_0}), w) \\ & \quad (\mathcal{P}(t, \cdot, \cdot) \text{ es lineal para cada } t \in \mathbb{Z}) \\ & = a\phi(\sigma + k_0 + 1, \sigma + k_0, \phi(\sigma + k_0, \sigma, x, \omega|_{\sigma}^{\sigma+k_0}), \omega|_{\sigma+k_0}^{\sigma+k_0+1}) \\ & \quad + b\phi(\sigma + k_0 + 1, \sigma + k_0, \phi(\sigma + k_0, \sigma, z, \nu|_{\sigma}^{\sigma+k_0}), \nu_w) \\ & = a\phi(\sigma + k_0 + 1, \sigma, x, \omega|_{\sigma}^{\sigma+k_0} \oplus \omega|_{\sigma+k_0}^{\sigma+k_0+1}) + b\phi(\sigma + k_0 + 1, \sigma, z, \nu|_{\sigma}^{\sigma+k_0} \oplus \nu|_{\sigma+k_0}^{\sigma+k_0+1}) \\ & \quad (\text{axioma de semigrupo de sistema}) \\ & = a\phi(\sigma + k_0 + 1, \sigma, x, \omega) + b\phi(\sigma + k_0 + 1, \sigma, z, \nu), \end{aligned}$$

por tanto

$$\phi(\sigma + k_0 + 1, \sigma + k_0, \mathbf{x}_0, a\omega|_{\sigma+k_0}^{\sigma+k_0+1} + b\nu|_{\sigma+k_0}^{\sigma+k_0+1}) = a\phi(\sigma + k_0 + 1, \sigma, x, \omega) + b\phi(\sigma + k_0 + 1, \sigma, z, \nu). \quad (\text{A.10})$$

De (A.9) y (A.10) se sigue que $\phi(\tau, \sigma, \cdot, \cdot)$ es lineal. $\square$

Proposición A.1.15. [p. 26] Si Σ es un sistema lineal de tiempo discreto, entonces el comportamiento del sistema inicializado $\Lambda_{\Sigma,0}$ es lineal [30, Ej. 2.4.4]. $\lrcorner$

Prueba. Sea $\Sigma = (\mathbb{Z}, \mathcal{X}, \mathcal{U}, \phi)$, $(\Sigma, 0)$ un sistema lineal inicializado con salidas en $\mathcal{Y}$.

1. $\Lambda_{\Sigma,0} = (\mathbb{Z}, \mathcal{U}, \mathcal{Y}, \lambda)$ con $\lambda : D_\lambda \rightarrow \mathcal{Y}$, donde $\lambda^{\sigma,\tau}(\omega) := h(\tau, \phi(\tau, \sigma, 0, \omega))$, y donde $D_\lambda \subseteq \{(\tau, \sigma, \omega) \mid (\tau, \sigma, 0, \omega) \in D_\phi\}$. Como Σ es completo, $D_\lambda = \{(\tau, \sigma, \omega) \mid (\tau, \sigma, 0, \omega) \in D_\phi\}$, por lo que $\Lambda_{\Sigma,0}$ es completo.
2. Por el axioma de identidad de sistema y el hecho de que $h(t, \cdot)$ es lineal, ocurre que $\lambda^{\sigma,\sigma}(\diamond) := h(\sigma, \phi(\sigma, \sigma, 0, \diamond)) = h(\sigma, 0) = 0$. También se tiene que $\lambda^{\sigma,\tau}(\cdot) := h(\tau, \phi(\tau, \sigma, 0, \cdot))$ es lineal, pues $\phi(\tau, \sigma, \cdot, \cdot)$ es lineal (Prop A.1.14).
3. Si $\sigma, \mu, \tau \in \mathbb{Z}$, $\sigma < \mu < \tau$, $\omega \in \mathcal{U}^{[\mu,\tau]}$, y $\mathbf{0}$ es la función cero en $[\sigma, \mu]$. Por el Lema A.1.14, ocurre que $\phi(\mu, \sigma, 0, \mathbf{0}) = 0$, y por el axioma de semigrupo de sistema se tiene que $\phi(\tau, \sigma, 0, \mathbf{0} \oplus \omega) = \phi(\tau, \mu, \phi(\mu, \sigma, 0, \mathbf{0}), \omega)$ y por tanto $\phi(\tau, \sigma, 0, \mathbf{0} \oplus \omega) = \phi(\tau, \mu, 0, \omega)$, finalmente

$$\lambda^{\sigma,\tau}(\mathbf{0} \oplus \omega) := h(\tau, \phi(\tau, \sigma, 0, \mathbf{0} \oplus \omega)) = h(\tau, \phi(\tau, \mu, 0, \omega)) := \lambda^{\mu,\tau}(\omega).$$

1, 2 y 3 demuestran que $\Lambda_{\Sigma,0}$ es un sistema lineal. $\square$

Proposición A.1.16. [p. 27] Si Λ es lineal, entonces existe una familia única de funciones

lineales $\tilde{\mathcal{A}}_{ij}$, $i, j \in \mathbb{Z}$, $i > j$, tales que para cada $\sigma, \tau \in \mathbb{Z}$, $\sigma < \tau$

$$\lambda^{\sigma, \tau}(\omega) = \sum_{j=\sigma}^{\tau-1} \tilde{\mathcal{A}}_{\tau j} \omega(j), \quad \forall \omega \in \mathcal{U}^{[\sigma, \tau]} \quad [\text{30, Ej. 2.4.5}]. \quad (\text{A.11})$$

Prueba. Sea Λ un comportamiento lineal de tiempo discreto. Sean $\sigma, \tau \in \mathbb{Z}$, $\sigma < \tau$ y $\omega \in \mathcal{U}^{[\sigma, \tau]}$. Sea $\mathbf{0} : [\sigma, \tau] \rightarrow \mathcal{U}$ donde $\mathbf{0}(t) = 0$ para todo $t \in [\sigma, \tau]$, se tiene que

$$\begin{aligned} \omega &= (\omega|_{\sigma}^{\sigma+1} \oplus \mathbf{0}|_{\sigma+1}^{\tau}) + \dots + \underbrace{(\mathbf{0}|_{\sigma}^{\sigma+\mu-1} \oplus \omega|_{\sigma+\mu-1}^{\sigma+\mu} \oplus \mathbf{0}|_{\sigma+\mu}^{\tau})}_{\mu\text{-ésimo término}} + \dots + (\mathbf{0}|_{\sigma}^{\tau-1} \oplus \omega|_{\tau-1}^{\tau}) \\ &= \sum_{j=\sigma}^{\tau-1} \mathbf{0}|_{\sigma}^j \oplus \omega|_j^{j+1} \oplus \mathbf{0}|_{j+1}^{\tau}, \text{ por tanto} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda^{\sigma, \tau}(\omega) &= \lambda^{\sigma, \tau} \left(\sum_{j=\sigma}^{\tau-1} \mathbf{0}|_{\sigma}^j \oplus \omega|_j^{j+1} \oplus \mathbf{0}|_{j+1}^{\tau} \right) = \sum_{j=\sigma}^{\tau-1} \lambda^{\sigma, \tau} (\mathbf{0}|_{\sigma}^j \oplus \omega|_j^{j+1} \oplus \mathbf{0}|_{j+1}^{\tau}) \quad (\lambda \text{ es lineal}) \\ &\stackrel{(\blacktriangle)}{=} \sum_{j=\sigma}^{\tau-1} \lambda^{j, \tau} (\omega|_j^{j+1} \oplus \mathbf{0}|_{j+1}^{\tau}) = \sum_{j=\sigma}^{\tau-1} \tilde{\mathcal{A}}_{\tau j} \omega(j) \end{aligned}$$

donde la igualdad $(\blacktriangle)$ se cumple por el axioma 4 de comportamiento lineal (Def. 2.2.11) y $\tilde{\mathcal{A}}_{\tau j}$ es la función definida en la Observación 2.2.13 para cada $j \in \{\sigma, \sigma+1, \dots, \tau-1\}$. Para probar la unicidad, supóngase que existen funciones lineales $\tilde{\mathcal{A}}_{\tau j}^* : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{Y}$ para cada $j \in \{\sigma, \sigma+1, \dots, \tau-1\}$ que cumplen (A.11). Tomando $u \in \mathcal{U}$, $\mu \in [\sigma, \tau]$, y definiendo $\nu \in \mathcal{U}^{[\sigma, \tau]}$ donde $\nu(\mu) = u$ y $\nu(t) = 0$ si $t \neq \mu$, se tiene que

$$0 = \lambda^{\sigma, \tau}(\nu) - \lambda^{\sigma, \tau}(\nu) = \sum_{j=\sigma}^{\tau-1} \tilde{\mathcal{A}}_{\tau j}^* \nu(j) - \sum_{j=\sigma}^{\tau-1} \tilde{\mathcal{A}}_{\tau j} \nu(j) = \tilde{\mathcal{A}}_{\tau \mu}^* u - \tilde{\mathcal{A}}_{\tau \mu} u \Rightarrow \tilde{\mathcal{A}}_{\tau \mu}^* u = \tilde{\mathcal{A}}_{\tau \mu} u.$$

Por la arbitrariedad de $u \in \mathcal{U}$ y $\mu \in [\sigma, \tau]$, se concluye que $\tilde{\mathcal{A}}_{\tau j}^* = \tilde{\mathcal{A}}_{\tau j} \forall j \in [\sigma, \tau]$. $\square$

Proposición A.1.17. [p. 27] Sea $\Sigma = (\mathbb{Z}, \mathcal{X}, \mathcal{U}, \phi)$ un sistema lineal. Entonces para todo $\sigma, \tau \in \mathbb{Z}$, $\sigma < \tau$ y todo $\omega \in \mathcal{U}^{[\sigma, \tau]}$, y $\mathbf{0} \in \mathcal{U}^{[\sigma, \tau]}$ función cero en $[\sigma, \tau]$, se cumple que

$$\phi(\tau, \sigma, 0, \omega|_{\sigma}^{\sigma+1} \oplus \mathbf{0}|_{\sigma+1}^{\tau}) = A(\tau-1)A(\tau-2) \dots A(\sigma+1)B(\sigma)\omega(\sigma),$$

donde se usa la notación $A(\mu_1)A(\mu_2) := A(\mu_1) \circ A(\mu_2)$, $\mu_1, \mu_2 \in [\sigma, \tau]$ y las funciones A, B son las mencionadas en la Observación 2.2.9. $\lrcorner$

Prueba. Sea $\sigma \in \mathbb{Z}$ y $\Sigma = (\mathbb{Z}, \mathcal{X}, \mathcal{U}, \phi)$ un sistema lineal. Se procede por inducción en k para el intervalo $[\sigma, \sigma+k]$. En el caso base $k=1$, para $\omega \in \mathcal{U}^{[\sigma, \sigma+1]}$, se tiene que

$$\phi(\sigma+1, \sigma, 0, \omega|_{\sigma}^{\sigma+1} \oplus \diamond) = \phi(\sigma+1, \sigma, 0, \omega(\sigma)) := \mathcal{P}(\sigma, 0, \omega(\sigma)) = A(\sigma)\mathbf{0}^0 + B(\sigma)\omega(\sigma) \quad (\text{A.12})$$

Por lo que el caso base se cumple. Sean $k_0 \in \mathbb{N}_{>0}$ fijo, $\omega \in \mathcal{U}^{[\sigma, \sigma+k_0]}$ y $\mathbf{0} \in \mathcal{U}^{[\sigma, \sigma+k_0+1]}$ la

función cero. La hipótesis de inducción es

$$\phi(\sigma + k_0, \sigma, 0, \omega|_{\sigma}^{\sigma+1} \oplus \mathbf{0}|_{\sigma+1}^{\sigma+k_0}) = A(\sigma + k_0 - 1)A(\sigma + k_0 - 2) \dots A(\sigma + 1)B(\sigma)\omega(\sigma),$$

y se debe probar que

$$\begin{aligned} & \phi(\sigma + k_0 + 1, \sigma, 0, \omega|_{\sigma}^{\sigma+1} \oplus \mathbf{0}|_{\sigma+1}^{\sigma+k_0+1}) \\ &= A(\sigma + k_0)A(\sigma + k_0 - 1)A(\sigma + k_0 - 2) \dots A(\sigma + 1)B(\sigma)\omega(\sigma). \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Se observa que

$$\begin{aligned} & \phi(\sigma + k_0 + 1, \sigma, 0, \omega|_{\sigma}^{\sigma+1} \oplus \mathbf{0}|_{\sigma+1}^{\sigma+k_0+1}) \\ &= \phi(\sigma + k_0 + 1, \sigma + k_0, \phi(\sigma + k_0, \sigma, 0, \omega|_{\sigma}^{\sigma+1} \oplus \mathbf{0}|_{\sigma+1}^{\sigma+k_0}), \mathbf{0}|_{\sigma+k_0}^{\sigma+k_0+1}) \quad (\text{axioma de semigrupo}) \\ &:= \mathcal{P}(\sigma + k_0, \phi(\sigma + k_0, \sigma, 0, \omega|_{\sigma}^{\sigma+1} \oplus \mathbf{0}|_{\sigma+1}^{\sigma+k_0}), 0) \quad (\text{Def. de } \mathcal{P} \text{ en (2.19)}) \\ &= A(\sigma + k_0)\phi(\sigma + k_0, \sigma, 0, \omega|_{\sigma}^{\sigma+1} \oplus \mathbf{0}|_{\sigma+1}^{\sigma+k_0}) + \cancel{B(\sigma + k_0)0} \quad (\text{Observación 2.2.9}) \\ &= A(\sigma + k_0)A(\sigma + k_0 - 1)A(\sigma + k_0 - 2) \dots A(\sigma + 1)B(\sigma)\omega(\sigma). \quad (\text{hipótesis de inducción}) \end{aligned}$$

Por tanto se cumple (A.13) y esto concluye la prueba. $\square$

Proposición A.1.18. [p. 27] Si Σ y Λ son lineales, entonces

$$\Lambda_{\Sigma,0} = \Lambda \iff \tilde{\mathcal{A}}_{ij} = \begin{cases} C(i)B(j) & \text{si } i = j + 1, \\ C(i)A(i-1)A(i-2) \dots A(j+1)B(j) & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (\text{A.14})$$

en términos de las funciones lineales de la Proposición 2.2.14 [30, Ej. 2.4.6]. $\lrcorner$

Prueba. Sea $\Sigma = (\mathbb{Z}, \mathcal{X}, \mathcal{U}, \phi)$ un sistema lineal de tiempo discreto con salidas en $\mathcal{Y}$, y sea $\Lambda = (\mathbb{Z}, \mathcal{U}, \mathcal{Y}, \kappa)$ un comportamiento lineal de tiempo discreto. Sean $\sigma, \tau \in \mathbb{Z}$, $\sigma < \tau$ y $\mathbf{0} \in \mathcal{U}^{[\sigma, \tau]}$ la función cero.

Sea $\Lambda_{\Sigma,0} = (\mathcal{T}, \mathcal{U}, \mathcal{Y}, \lambda)$ el comportamiento del sistema inicializado, donde

$$\lambda^{\sigma, \tau}(\omega) := h(\tau, \phi(\tau, \sigma, 0, \omega)) = C(\tau)\phi(\tau, \sigma, 0, \omega) \quad (\text{Obs. 2.2.9}). \quad (\text{A.15})$$

La Proposición 2.2.14 asegura que existe un conjunto único de funciones lineales $\{\tilde{\mathcal{A}}_{\tau, j} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{Y} \mid j \in [\sigma, \tau]\}$ que cumple que $\kappa^{\sigma, \tau}(\omega) = \sum_{j=\sigma}^{\tau-1} \tilde{\mathcal{A}}_{\tau, j}\omega(j)$ para cada $\omega \in \mathcal{U}^{[\sigma, \tau]}$. Por otro lado, la Proposición 2.2.12 asegura que $\Lambda_{\Sigma,0}$ es un comportamiento lineal, por lo que $\lambda^{\sigma, \tau}$ cumple las propiedades de la Definición 2.2.11, entonces

$$\begin{aligned} \lambda^{\sigma, \tau}(\omega) &= \sum_{j=\sigma}^{\tau-1} \lambda^{j, \tau}(\omega|_j^{j+1} \oplus \mathbf{0}|_{j+1}^{\tau}) \quad (\text{ver prueba de la Prop. A.1.16}) \\ &= \sum_{j=\sigma}^{\tau-1} C(\tau)\phi(\tau, j, 0, \omega|_j^{j+1} \oplus \mathbf{0}|_{j+1}^{\tau}) \quad (\text{por (A.15)}) \\ &= \sum_{j=\sigma}^{\tau-1} C(\tau)A(\tau-1)A(\tau-2) \dots A(j+1)B(j)\omega(j). \quad (\text{Lema A.1.17}) \quad (\text{A.16}) \end{aligned}$$

Todo lo anterior se cumple al suponer que Σ y Λ son lineales.

$\Rightarrow$) Si $\Lambda_{\Sigma,0} = \Lambda$, entonces $\lambda = \kappa$, y como el conjunto $\{\tilde{\mathcal{A}}_{\tau j} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{Y} \mid j \in [\sigma, \tau)\}$ es único (Prop. 2.2.14), se tiene que $\tilde{\mathcal{A}}_{\tau j} = C(\tau)A(\tau-1)A(\tau-2)\dots A(j+1)B(j)$ para todo $j \in [\sigma, \tau-1)$, y si $j = \tau-1$, se tiene que $\tilde{\mathcal{A}}_{\tau j} = C(\tau)B(\tau-1)$ por (A.12), por tanto se cumple (A.14) y esto concluye la primera mitad de la prueba.

$\Leftarrow$) Si la función de respuesta κ de Λ cumple que $\kappa^{\sigma,\tau}(\omega) = \sum_{j=\sigma}^{\tau-1} \tilde{\mathcal{A}}_{\tau j} \omega(j)$, para cualesquiera $\sigma, \tau \in \mathbb{Z}$, $\sigma < \tau$ y para cualquier $\omega \in \mathcal{U}^{[\sigma,\tau]}$, donde $\tilde{\mathcal{A}}_{\tau j}$ cumple (A.14) para toda $j \in [\sigma, \tau)$, entonces por lo mencionado en (A.16), se tiene que $\lambda = \kappa$ y por lo tanto $\Lambda_{\Sigma,0} = \Lambda$. $\square$

Proposición A.1.19. [p. 27] Sea Λ un comportamiento lineal de tiempo discreto. Considérese la familia de funciones lineales $\{\tilde{\mathcal{A}}_{i j} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{Y} \mid i > j\}$ presentada en la Proposición 2.2.14. Entonces, Λ es invariante en el tiempo si y solo si existe un conjunto de funciones lineales $\{\mathcal{A}_k : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{Y} \mid k \in \mathbb{N}_{>0}\}$ tal que

$$\tilde{\mathcal{A}}_{i j} = \mathcal{A}_{i-j} \quad \forall i > j, \quad [30, \text{Ej. 2.4.7}].$$

Prueba. Sea Λ un comportamiento lineal de tiempo discreto y $\sigma, \tau \in \mathbb{Z}$, $\sigma < \tau$.

$\Rightarrow$) Supóngase que Λ es invariante en el tiempo, entonces

$$\sum_{j=\sigma+\mu}^{\tau-1+\mu} \tilde{\mathcal{A}}_{\tau+\mu, j+\mu} \omega(j-\mu) = \lambda^{\sigma,\tau}(\omega(j-\mu)) = \lambda^{\sigma,\tau}(\omega(j)) \quad \forall \mu \in \mathbb{Z}, \forall \omega \in \mathcal{U}^{[\sigma,\tau]}.$$

Elijiendo $\mu_0 = -j$ para cada $j \in [\sigma, \tau)$ se sigue que $\tilde{\mathcal{A}}_{\tau-j,0} = \tilde{\mathcal{A}}_{\tau j}$. Definiendo $\mathcal{A}_k := \tilde{\mathcal{A}}_{k,0}$ para cada $k \in [1, \tau-\sigma)$, y tomando en cuenta la arbitrariedad de τ , se concluye la primera mitad de la prueba.

$\Leftarrow$) Supóngase existe un conjunto de funciones lineales $\{\mathcal{A}_i : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{Y} \mid i \in [1, \tau-\sigma)\}$ tal que $\tilde{\mathcal{A}}_{\tau j} = \mathcal{A}_{\tau-j}$ para cada $\tau > j > 0$. Sea $\omega \in \mathcal{U}^{[\sigma,\tau]}$ y $\mu \in \mathbb{Z}$, entonces para cada $j \in [\sigma, \tau)$ se tiene que $\tilde{\mathcal{A}}_{\tau j} = \mathcal{A}_{\tau-j} = \mathcal{A}_{(\tau+\mu)-(j+\mu)} = \tilde{\mathcal{A}}_{\tau+\mu, j+\mu}$, para cualquier $\mu \in \mathbb{Z}$, y por tanto

$$\lambda^{\sigma,\tau}(\omega) = \sum_{j=\sigma}^{\tau-1} \tilde{\mathcal{A}}_{\tau j} \omega(j) = \sum_{j=\sigma+\mu}^{\tau-1+\mu} \tilde{\mathcal{A}}_{\tau+\mu, j+\mu} \omega(j-\mu) = \lambda^{\sigma+\mu, \tau+\mu}(\mathbb{T}_\mu \omega). \quad \square$$

Proposición A.1.20. [p. 29] Sea f un LD, y sea

$$D := \{(\tau, \sigma, x, \omega) \mid \sigma \leq \tau, x \in \mathcal{X}, \omega \in \mathcal{U}^{[\sigma,\tau]} \text{ es admisible para } x\}.$$

En este conjunto se define

$$\phi(\tau, \sigma, x, \omega) := \xi(\tau),$$

donde $\xi(t)$ es la solución (única) del PVI $\dot{\xi}(t) = f(t, \xi(t), \omega(t))$, $\xi(\sigma) = x$ evaluada en τ , y que está definida en $[\sigma, \tau]$. Entonces

$$\Sigma_f := (\mathbb{R}, \mathcal{X}, \mathcal{U}, \phi)$$

es un sistema [30, Ej. 2.6.3]. $\lrcorner$

Prueba. En toda la prueba se considera $x_0 \in \mathcal{X}$ e $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ un intervalo.

1. Sea $a_0 \in \mathcal{U}$, y $\omega_{a_0} \in L_{loc}^\infty(\mathcal{I}, \mathcal{U})$, donde $\omega_{a_0}(t) = a_0$ para toda $t \in \mathcal{I}$. Por la Proposición 2.2.22, existe $J = [\sigma, \tau] \subseteq \mathcal{I}$ intervalo donde existe solución única y maximal de $\dot{\zeta}(t) = f(t, \zeta(t), \omega_{a_0}(t))$, $\zeta(\sigma) = x_0$. Así, $(\tau, \sigma, x_0, \omega_{a_0}|_J) \in \mathcal{D}$, pues $\omega_{a_0}|_J \in \mathcal{U}^J$ es admisible para x_0 , por lo tanto Σ_f cumple el axioma de *no trivialidad* de un sistema.
2. Supóngase que $\omega \in \mathcal{U}^{[\sigma, \mu]}$ es admisible para x_0 , es decir, existe $\xi_0 : [\sigma, \mu] \rightarrow \mathcal{X}$ solución única y maximal de $\dot{\zeta}(t) = f(t, \zeta(t), \omega(t))$, $\zeta(\sigma) = x_0$. Sea $\tau \in [\sigma, \mu]$, la maximalidad de ξ_0 , asegura que $\xi_0|_{[\sigma, \tau]}$ es la solución de $\dot{\zeta}(t) = f(t, \zeta(t), \omega|_{[\sigma, \tau]}(t))$, $\zeta(\sigma) = x_0$, por lo que $\omega_1 := \omega|_{[\sigma, \tau]}$ es admisible para x_0 en $[\sigma, \tau]$. Por otra parte $\xi_0|_{[\tau, \mu]}$ es la solución de $\dot{\zeta}(t) = f(t, \zeta(t), \omega|_{[\tau, \mu]}(t))$, $\zeta(\tau) = \xi_0(\tau) := \phi(\tau, \sigma, x_0, \omega_1)$ de modo que $\omega_2 := \omega|_{[\tau, \mu]}$ es admisible para $\xi_0(\tau)$ en $[\tau, \mu]$. Lo anterior prueba que Σ_f cumple el axioma de *restricción* de un sistema.
3. Sean $\sigma, \tau, \mu \in \mathbb{R}$, $\sigma < \tau < \mu$, $x, x_1, x_2 \in \mathcal{X}$, $\omega_1 \in \mathcal{U}^{[\sigma, \tau]}$ y $\omega_2 \in \mathcal{U}^{[\tau, \mu]}$ tales que $\xi_1(\tau) = \phi(\tau, \sigma, x, \omega_1) = x_1$ y $\xi_2(\mu) = \phi(\mu, \tau, x_1, \omega_2) = x_2$, donde $\xi_1 : [\sigma, \tau] \rightarrow \mathcal{X}$ es la solución de $\dot{\zeta}(t) = f(t, \zeta(t), \omega_1(t))$, $\zeta(\sigma) = x$ y $\zeta_2 : [\tau, \mu] \rightarrow \mathcal{X}$ es la solución de $\dot{\zeta}(t) = f(t, \zeta(t), \omega_2(t))$, $\zeta(\tau) = x_1 = \xi_1(\tau)$. Entonces $\dot{\zeta}(t) = f(t, \zeta(t), \omega_1 \oplus \omega_2)$, $\zeta(\sigma) = x$ tiene solución ξ_0 en $[\sigma, \mu]$ dada por $\xi_0(t) = \begin{cases} \xi_1(t) & \text{si } t \in [\sigma, \tau] \\ \xi_2(t) & \text{si } t \in [\tau, \mu] \end{cases}$. Por lo tanto, $\omega_2 \oplus \omega_3$ es admisible para x y además

$$\phi(\mu, \sigma, x, \omega_1 \oplus \omega_2) = \xi_0(\mu) = \xi_2(\mu) = \phi(\mu, \tau, x_1, \omega_2) = x_2 = \phi(\mu, \tau, \phi(\tau, \sigma, x, \omega_1), \omega_2).$$

lo que prueba que Σ_f cumple el axioma de *semigrupo* de un sistema.

4. Finalmente, para $\diamond \in \mathcal{D}$, se puede definir $\phi(\sigma, \sigma, x, \diamond) := x$, así, Σ_f cumple el axioma de *identidad* de un sistema. Todo lo anterior prueba que Σ_f es un sistema. $\square$

Los siguientes dos resultados servirán para probar la Proposición A.1.23.

Lema A.1.21. Para cualquier $n, m \in \mathbb{N}_{>0}$, si $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ es de la forma $f(x) = v_0 + T_0(x)$ donde $v_0 \in \mathbb{R}^m$ y $T_0 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, entonces f es de clase $\mathcal{C}^1$ en $\mathbb{R}^m$ con $f'(x) = T_0(x)$. $\lrcorner$

Prueba. Supóngase que $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $f(x) = v_0 + T_0(x)$ para $v_0 \in \mathbb{R}^m$ y $T_0 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$. La derivada de la función $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ en un punto $x \in \mathbb{R}^m$ es una función $\lambda \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ que cumple $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\|f(x+u) - f(x) - \lambda(u)\|}{\|u\|} = 0$. En este caso se observa que

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\|f(x+u) - f(x) - \lambda(u)\|}{\|u\|} &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\|v_0 + T_0(x+u) - v_0 - T_0(x) - \lambda(u)\|}{\|u\|} \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\|T_0(x) + T_0(u) - T_0(x) - \lambda(u)\|}{\|u\|} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\|T_0(u) - \lambda(u)\|}{\|u\|}. \end{aligned}$$

Tomando $\lambda = T_0 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ se tiene que $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\|T_0(u) - \lambda(u)\|}{\|u\|} = \lim_{u \rightarrow 0} 0 = 0$, y como $x \in \mathbb{R}^m$ fue arbitrario, se tiene que $f'(x) = T_0(x)$, esta función es lineal, por el Lema A.1.4 se tiene que es continua y así en efecto f es de clase $\mathcal{C}^1$. $\square$

Teorema A.1.22. Sea $\Omega \subset V_1 \times \cdots \times V_n$ abierto con V_j espacio de Banach para cada $j \in \bar{n}$ y W espacio de Banach. Una función $\varphi : \Omega \rightarrow W$ es de clase $\mathcal{C}^1$ si y solo si φ es parcialmente diferenciable respecto a la j -ésima variable en Ω y

$$\partial_j \varphi : \Omega \rightarrow \mathcal{L}(V_j, W)$$

es continua en Ω para todo $j \in \bar{n}$, donde

$$\mathcal{L}(V_j, W) := \{f : V_j \rightarrow W \mid f \text{ es lineal y continua}\} \quad [55, \text{Teo. 9.26}]. \quad \lrcorner$$

Proposición A.1.23. [p. 29] Sean $m, n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{X} := \mathbb{R}^n$, $\mathcal{U} := \mathbb{R}^m$. Asúmase que

$$f(t, x, u) = A(t)x + B(t)u,$$

donde $A \in M_{n \times n}(L_{loc}^\infty(\mathbb{R}))$ y $B \in M_{n \times m}(L_{loc}^\infty(\mathbb{R}))$. Equivalentemente que

$$f : \mathbb{R} \times \mathcal{X} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{X}$$

es lineal en (x, u) para cada t fija, y es localmente esencialmente acotada en t para cada (x, u) fija. Entonces f es un LD (Definición 2.2.21 en la página 28), con $\tilde{f}$ de clase $\mathcal{C}^1$ [30, Ej. 2.7.1]. $\lrcorner$

Prueba. Supóngase que $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f(t, x, u) = A(t)x + B(t)u$ con $A = (a_{ij}) \in M_{n \times n}(L_{loc}^\infty(\mathbb{R}))$ y $B = (b_{ij}) \in M_{n \times m}(L_{loc}^\infty(\mathbb{R}))$.

Se definen

$$\psi_1 : \bar{n} \times \bar{n} \rightarrow \{1, 2, \dots, n^2\}, (i, j) \mapsto \psi_1(i, j) := (i-1)n + j, \text{ y}$$

$$\psi_2 : \bar{n} \times \bar{m} \rightarrow \{n^2 + 1, n^2 + 2, \dots, n^2 + nm\}, (i, r) \mapsto \psi_2(i, r) := n^2(i-1)n + r.$$

ψ_1 es sobreyectiva, pues si $l \in \{1, 2, \dots, n^2\}$ entonces $1 \leq l \leq n^2$, y así $l = k_0 n + j_0$ para algún $k_0 \in \{0, \dots, n-1\}$ y algún $j_0 \in \bar{n}$, entonces $i_0 := k_0 + 1 \in \bar{n}$ y así $i_0, j_0 \in \bar{n}$ cumplen que $l = (i_0 - 1)n + j_0 = \psi_1(i_0, j_0)$. También se tiene que $|\bar{n} \times \bar{n}| = |\{1, 2, \dots, n^2\}| < \infty$, entonces ψ_1 también es inyectiva y por tanto biyectiva². De manera análoga se puede ver que ψ_2 es biyectiva. Por lo tanto, dado $l \in \{1, \dots, n^2\}$ existen $i, j \in \bar{n}$ únicos, tales que $(i-j)n + j = l$, de la misma forma, dado $l \in \{n^2 + 1, n^2 + 2, \dots, n^2 + nm\}$ existen $i \in \bar{n}$ y $r \in \bar{m}$ únicos, tales que $n^2 + (i-1)n + r = l$, esta última observación garantizará que las funciones en (A.17) y (A.18) están bien definidas.

Sea $S = \mathbb{R}^{n^2+nm}$, se define

$$\pi : \mathbb{R} \rightarrow S, \quad t \mapsto \pi(t) = (\pi_1(t), \dots, \pi_{n^2}(t), \pi_{n^2+1}(t), \dots, \pi_{n^2+nm}(t))$$

donde

$$\pi_l(t) = \begin{cases} a_{ij}(t) & \text{donde } (i-1)n + j = l & \text{con } i, j \in \bar{n}, \\ b_{ir}(t) & \text{donde } n^2 + (i-1)n + r = l & \text{con } i \in \bar{n}, r \in \bar{m}. \end{cases} \quad (\text{A.17})$$

Como por hipótesis $a_{ij}, b_{ir} \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R})$ para todo $i, j \in \bar{n}$ y todo $r \in \bar{m}$, se tiene que $\pi_l(t) \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R})$ para todo $l \in \{1, \dots, n^2 + nm\}$ y por lo tanto $\pi \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}, S)$ (Lema 2.1.3), y así π cumple la condición 3 de la definición de LD.

²Se usa el hecho de que en una función $f : A \rightarrow B$ con $|B| = |A| = n \in \mathbb{N}$ se cumple que f es inyectiva $\iff f$ es sobreyectiva

Por otro lado, considerando $s = (s_1, \dots, s_{n^2+nm}) \in S$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y $u = (u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^m$, se define

$$\tilde{f}: S \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (s, x, u) \mapsto \left(\sum_{j=1}^n w_{1j}^s x_j + \sum_{r=1}^m y_{1r}^s u_r, \dots, \sum_{j=1}^n w_{nj}^s x_j + \sum_{r=1}^m y_{nr}^s u_r \right)$$

donde, w_{ij}^s y y_{ir}^s se definen³ de la misma forma que en (A.17) como

$$\begin{cases} w_{ij}^s = s_{l_0} & \text{donde } (i-1)n + j = l_0 & \text{con } i, j \in \bar{n}, \\ y_{ir}^s = s_{l_1} & \text{donde } n^2 + (i-1)n + r = l_1 & \text{con } i \in \bar{n} \text{ } r \in \bar{m}. \end{cases} \quad (\text{A.18})$$

De esta forma

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\pi(t), x, u) &= \left(\sum_{j=1}^n w_{1j}^{\pi(t)}(t) x_j + \sum_{r=1}^m y_{1r}^{\pi(t)}(t) u_r, \dots, \sum_{j=1}^n w_{nj}^{\pi(t)}(t) x_j + \sum_{r=1}^m y_{nr}^{\pi(t)}(t) u_r \right) \\ &= \left(\sum_{j=1}^n a_{1j}(t) x_j + \sum_{r=1}^m b_{1r}(t) u_r, \dots, \sum_{j=1}^n a_{nj}(t) x_j + \sum_{r=1}^m b_{nr}(t) u_r \right) \\ &= A(t)x + B(t)u = f(t, x, u). \end{aligned}$$

Luego, sean $s_1 \in \mathbb{R}^{n^2+nm}$ y $u_1 = (u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^m$ se considera la función

$$\tilde{f}(s_1, \cdot, u_1): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij}^{s_1} x_j + \sum_{i=1}^n \sum_{r=1}^m y_{ir}^{s_1} u_r$$

con $x = (x_1, \dots, x_n)$. Se observa que $\tilde{f}(s_1, \cdot, u_1) = \tilde{f}(s_1, \cdot, 0) + \tilde{f}(s_1, 0, u_1)$. Sean $\beta, \gamma \in \mathbb{R}^n$ y $c \in \mathbb{R}$ con $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ y $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, entonces

$$\begin{aligned} \tilde{f}(s_1, c(\alpha + \beta), 0) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij}^{s_1} c(\alpha_j + \beta_j) = c \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij}^{s_1} \alpha_j + c \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij}^{s_1} \beta_j \\ &= c\tilde{f}(s_1, \alpha, 0) + c\tilde{f}(s_1, \beta, 0). \end{aligned}$$

Por lo que $\tilde{f}(s_0, \cdot, 0)$ es lineal. Entonces $\tilde{f}(s_0, \cdot, u_0)$ es la suma de un vector en $\mathbb{R}^n$ y una función lineal, por el Lema A.1.21 esto implica que $\tilde{f}(s_0, \cdot, u_0)$ es de clase $\mathcal{C}^1$ en $\mathbb{R}^n$ y se cumple la condición 1 de la definición de LD.

Luego, al producto cartesiano $S \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ se le puede asignar la norma (ver [55, Sec. 9.5])

$$\|\cdot\|_\times: S \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad (s, x, u) \mapsto \|(s, x, u)\|_\times := \max\{\|s\|_S, \|x\|_{\mathbb{R}^n}, \|u\|_{\mathbb{R}^m}\}.$$

Así $S \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ es un espacio de Banach. Se asegura que $\tilde{f}$ es de clase $\mathcal{C}^1$ en $S \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, para ver esto, se busca usar el Teorema A.1.22.

En lo que resta de la prueba se considera $\alpha = (s_0, x_0, u_0) \in S \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ con $s_0 =$

³Se usa el superíndice "s" en " w_{ij}^s " y " y_{ir}^s " para enfatizar que estos términos dependen de cada entrada del vector $s = (s_1, \dots, s_{n^2+nm}) \in \mathbb{R}^{n^2+nm}$.

$(s_1^0, \dots, s_{n^2+nm}^0) \in S$, $x_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$ y $u_0 = (u_1^0, \dots, u_m^0) \in \mathbb{R}^m$.

La derivada parcial de $\tilde{f}$ respecto a la primera variable, denotada como $\tilde{f}_s$ o $\partial_1 \tilde{f}$, en el punto α , es la función

$$\partial_1 \tilde{f} : S \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathcal{L}(S, \mathbb{R}^n), \quad \alpha \mapsto \partial_1 \tilde{f}(\alpha) := \tilde{f}'_{1,\alpha}(0)$$

donde $\tilde{f}_{1,\alpha} : \Omega_{1,\alpha} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $v \mapsto \tilde{f}_{1,\alpha}(v) := \tilde{f}(\alpha + \iota_1(v))$, con

$$\Omega_{1,\alpha} := \{v \in S \mid \alpha + \iota_1(v) \in S \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m\} \quad \text{y} \quad \iota_1 : S \rightarrow S \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \quad v \mapsto (v, 0, 0).$$

Se observa que

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{1,\alpha}(v) &:= \tilde{f}(\alpha + \iota_1(v)) = \tilde{f}((s_0, x_0, u_0) + (v, 0, 0)) = \tilde{f}(s_0 + v, x_0, u_0) \\ &= \left(\sum_{j=1}^n w_{1j}^{s_0+v} x_j^0 + \sum_{r=1}^m y_{1r}^{s_0+v} u_r^0, \dots, \sum_{j=1}^n w_{nj}^{s_0+v} x_j^0 + \sum_{r=1}^m y_{nr}^{s_0+v} u_r^0 \right) \\ &= \left(\sum_{j=1}^n w_{1j}^{s_0} x_j^0 + \sum_{r=1}^m y_{1r}^{s_0} u_r^0, \dots, \sum_{j=1}^n w_{nj}^{s_0} x_j^0 + \sum_{r=1}^m y_{nr}^{s_0} u_r^0 \right) \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

$$+ \left(\sum_{j=1}^n w_{1j}^v x_j^0 + \sum_{r=1}^m y_{1r}^v u_r^0, \dots, \sum_{j=1}^n w_{nj}^v x_j^0 + \sum_{r=1}^m y_{nr}^v u_r^0 \right). \quad (\text{A.20})$$

Por lo tanto $\tilde{f}_{1,\alpha} = v_1 + T_1(v)$ donde $v_1 \in \mathbb{R}^n$ es el vector constante en (A.19) y $T_1(v)$ es la función que depende de $v \in \Omega_{1,\alpha}$ en (A.20). Se observa que T_1 es lineal, pues si $\beta, \gamma \in \Omega_{1,\alpha}$ y $c \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned} T_1(c(\beta + \gamma)) &= T_1(c\beta + c\gamma) \\ &= \left(\sum_{j=1}^n w_{1j}^{c\beta+c\gamma} x_j^0 + \sum_{r=1}^m y_{1r}^{c\beta+c\gamma} u_r^0, \dots, \sum_{j=1}^n w_{nj}^{c\beta+c\gamma} x_j^0 + \sum_{r=1}^m y_{nr}^{c\beta+c\gamma} u_r^0 \right) \\ &= c \left(\sum_{j=1}^n w_{1j}^{\beta} x_j^0 + \sum_{r=1}^m y_{1r}^{\beta} u_r^0, \dots, \sum_{j=1}^n w_{nj}^{\beta} x_j^0 + \sum_{r=1}^m y_{nr}^{\beta} u_r^0 \right) \\ &\quad + c \left(\sum_{j=1}^n w_{1j}^{\gamma} x_j^0 + \sum_{r=1}^m y_{1r}^{\gamma} u_r^0, \dots, \sum_{j=1}^n w_{nj}^{\gamma} x_j^0 + \sum_{r=1}^m y_{nr}^{\gamma} u_r^0 \right) \\ &= cT_1(\beta) + cT_1(\gamma). \end{aligned}$$

Como $\tilde{f}_{1,\alpha}$ es la suma de una constante y una función lineal, por el Lema A.1.21 se tiene que $\tilde{f}_{1,\alpha}$ es de clase $\mathcal{C}^1$ en $\Omega_{1,\alpha}$, y su derivada es

$$\tilde{f}'_{1,\alpha} : \Omega_{1,\alpha} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad v \mapsto \left(\sum_{j=1}^n w_{1j}^v x_j^0 + \sum_{r=1}^m y_{1r}^v u_r^0, \dots, \sum_{j=1}^n w_{nj}^v x_j^0 + \sum_{r=1}^m y_{nr}^v u_r^0 \right).$$

En particular, $\tilde{f}_{1,\alpha}$ es diferenciable en 0 y $\tilde{f}'_{1,\alpha}(0) = 0$, y como α es arbitrario esto ocurre

para toda $\alpha \in S \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Por lo tanto $\tilde{f}$ es parcialmente diferenciable respecto a su primer variable en $S \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ y además

$$\partial_1 \tilde{f} : S \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathcal{L}(S, \mathbb{R}^n), \quad \alpha \mapsto \partial_1 \tilde{f}(\alpha) := \tilde{f}'_{1,\alpha}(0) = 0,$$

que es una función constante y por lo tanto continua.

Por otro lado, la derivada parcial de $\tilde{f}$ respecto a la segunda variable, denotada como $\tilde{f}_x$ o $\partial_2 \tilde{f}$, en el punto α , es la función

$$\partial_2 \tilde{f} : S \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathcal{L}(S, \mathbb{R}^n), \quad \alpha \mapsto \partial_2 \tilde{f}(\alpha) := \tilde{f}'_{2,\alpha}(0)$$

con $\tilde{f}_{2,\alpha} : \Omega_{2,\alpha} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $v \mapsto \tilde{f}_{2,\alpha}(v) := \tilde{f}(\alpha + \iota_2(v))$ y

$$\Omega_{2,\alpha} := \{v \in \mathbb{R}^n \mid \alpha + \iota_2(v) \in S \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m\}, \quad \iota_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow S \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \quad v \mapsto (0, v, 0).$$

Sea $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, se tiene que

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{2,\alpha}(v) &= \tilde{f}(\alpha + \iota_2(v)) = \tilde{f}((s_0, x_0, u_0) + (0, v, 0)) = \tilde{f}(s_0, x_0 + v, u_0) \\ &= \left(\sum_{j=1}^n w_{1j}^{s_0} (x_j^0 + v_j) + \sum_{r=1}^m y_{1r}^{s_0} u_r^0, \dots, \sum_{j=1}^n w_{nj}^{s_0} (x_j^0 + v_j) + \sum_{r=1}^m y_{nr}^{s_0} u_r^0 \right) \\ &= \left(\sum_{j=1}^n w_{1j}^{s_0} x_j^0 + \sum_{r=1}^m y_{1r}^{s_0} u_r^0, \dots, \sum_{j=1}^n w_{nj}^{s_0} x_j^0 + \sum_{r=1}^m y_{nr}^{s_0} u_r^0 \right) \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

$$+ \left(\sum_{j=1}^n w_{1j}^{s_0} v_j, \dots, \sum_{j=1}^n w_{nj}^{s_0} v_j \right). \quad (\text{A.22})$$

De la misma forma que en el caso anterior, se tiene que $\tilde{f}_{2,\alpha} = v_2 + T_2(v)$ donde $v_2 \in \mathbb{R}^n$ es el vector constante en (A.21) y $T_2(v)$ es la función que depende de $v \in \Omega_{2,\alpha}$ en (A.22). Si $\beta, \gamma \in \mathbb{R}^n$ y $c \in \mathbb{R}$ con $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, se tiene que

$$\begin{aligned} T_2(c(\beta + \gamma)) &= \left(\sum_{j=1}^n w_{1j}^{s_0} c(\beta_j + \gamma_j), \dots, \sum_{j=1}^n w_{nj}^{s_0} c(\beta_j + \gamma_j) \right) \\ &= c \left(\sum_{j=1}^n w_{1j}^{s_0} \beta_j, \dots, \sum_{j=1}^n w_{nj}^{s_0} \beta_j \right) + c \left(\sum_{j=1}^n w_{1j}^{s_0} \gamma_j, \dots, \sum_{j=1}^n w_{nj}^{s_0} \gamma_j \right) \\ &= cT_2(\beta) + cT_2(\gamma). \end{aligned}$$

Entonces $\tilde{f}_{2,\alpha} = v_2 + T_2(v)$ con T_2 lineal, por lo tanto, nuevamente del Lema A.1.21, se tiene que $\tilde{f}_{2,\alpha}$ es de clase $\mathcal{C}^1$ en $\Omega_{2,\alpha}$, y su derivada es

$$\tilde{f}'_{2,\alpha} : \Omega_{2,\alpha} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad v \mapsto \left(\sum_{j=1}^n w_{1j}^{s_0} v_j, \dots, \sum_{j=1}^n w_{nj}^{s_0} v_j \right).$$

En particular, $\tilde{f}_{2,\alpha}$ es diferenciable en 0 y $\tilde{f}'_{2,\alpha}(0) = 0$ para toda $\alpha \in S \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Por lo tanto

$\tilde{f}$ es parcialmente diferenciable respecto a su primer segunda variable en $S \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ y

$$\partial_2 \tilde{f}: S \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), \quad \alpha \mapsto \partial_2 \tilde{f}(\alpha) := \tilde{f}'_{2,\alpha}(0) = 0.$$

Que nuevamente es una función constante y por tanto continua.

De manera completamente análoga se puede ver que

$$\partial_3 \tilde{f}: S \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n), \quad \alpha \mapsto \partial_3 \tilde{f}(\alpha) := \tilde{f}'_{3,\alpha}(0) = 0.$$

Como se ha mostrado que todas las derivadas parciales de $\tilde{f}$ existen y son continuas, por el Teorema A.1.22 se tiene que $\tilde{f}$ es de clase $\mathcal{C}^1$. Esto último también implica que $\tilde{f}$ es continua en $S \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ [55, Prop. 9.11], y como ya se probó que $\tilde{f}_x$ es continua, se cumple la segunda condición de la definición de LD. Por todo lo mencionado hasta ahora, se tiene que f es un lado derecho y $\tilde{f}$ es de clase $\mathcal{C}^1$ que es lo que se buscaba. $\square$

El siguiente resultado será útil de ahora en adelante.

Proposición A.1.24. [Desigualdad de Hölder] Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto.

- (a) Si $p, q \in (1, \infty)$ son tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $f \in L^p(\Omega)$ y $g \in L^q(\Omega)$, entonces $fg \in L^1(\Omega)$ y $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$.
- (b) Si $f \in L^\infty(\Omega)$ y $g \in L^1(\Omega)$, entonces $fg \in L^1(\Omega)$ y $\|fg\|_1 < \|f\|_\infty \|g\|_1$ [55, Prop. 14.21]. $\lrcorner$

Proposición A.1.25. [p. 30] Todo sistema lineal continuo es completo respecto al conjunto

$$L^1_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m) := \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m \mid f(t) = (f_1(t), \dots, f_m(t)) \text{ y } f_i \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) \forall i \in \overline{m}\}^4.$$

Además, para cualquier $\sigma, \tau \in \mathbb{R}$, $\sigma < \tau$ se cumple que $\phi(\tau, \sigma, \cdot, \cdot): \mathcal{X} \times L^1([\sigma, \tau], \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathcal{X}$ es lineal. $\lrcorner$

Prueba. Sea $\Sigma_f = (\mathbb{R}, \mathcal{X}, \mathcal{U}, \phi) = (\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m, \phi)$ un sistema lineal continuo, con lado derecho $f(t, x, u) = A(t)x + B(t)u$, donde $A \in M_{n \times n}(L^\infty_{loc}(\mathbb{R}))$ y $B \in M_{n \times m}(L^\infty_{loc}(\mathbb{R}))$ con $A(t)(\cdot) := f(t, \cdot, 0): \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $B(t)(\cdot) := f(t, 0, \cdot): \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ para cada $t \in \mathbb{R}$.

1. Sea $\omega \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ con $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_m)$ y $x_0 \in \mathbb{R}^n$. La función de transición ϕ del sistema Σ_f , se define como $\phi(\tau, \sigma, x_0, \omega) := \xi(\tau)$, donde $\xi(t)$ es la solución del problema del valor inicial

$$\dot{\xi}(t) = f(t, \xi(t), \omega(t)) = A(t)\xi(t) + B(t)\omega(t), \quad \xi(\sigma) = x_0.$$

Sea $B = (b_{ij})$ se tiene que $B(t)\omega(t) = \left(\sum_{j=1}^m b_{1j}(t)\omega_j(t), \dots, \sum_{j=1}^m b_{nj}(t)\omega_j(t) \right)$, y como $b_{ij} \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R})$ y $\omega_j \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, por la Prop. A.1.24 (b), $\left[\sum_{j=1}^m b_{ij}(t)\omega_j(t) \right]_{(\sigma, \tau)} \in L^1((\sigma, \tau))$ para todo $(i, j) \in \overline{n} \times \overline{m}$ y todo $\sigma, \tau \in \mathbb{R}$, $\sigma < \tau$, así $B(t)\omega(t) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ y por tanto, este PVI es un lineal no homogéneo, cuya solución existe para todo $t \in \mathbb{R}$, y está dada por la fórmula de variación de parámetros en (A.1.11): $\xi(t) = \Phi(t, \sigma)x_0 + \int_\sigma^t \Phi(t, s)B(s)\omega(s) ds$. Por tanto (x_0, ω) es un par admisible y la función

de transición $\phi(\tau, \sigma, x_0, \omega)$ está bien definida, por lo que Σ_f es completo respecto al conjunto de los controles localmente integrables⁵.

2. Sean $\sigma, \tau \in \mathbb{R}$, $\sigma < \tau$, $x_0 \in \mathbb{R}^m$, $(x, \omega), (z, \nu) \in \mathcal{X} \times L^1([\sigma, \tau], \mathbb{R}^m)$, $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $\phi(\tau, \sigma, ax + bz, a\omega + b\nu) = \xi(\tau)$, con $\xi(t)$ solución de

$$\dot{\xi}(t) = A(t)\xi(t) + B(t)(a\omega + b\nu)(t), \quad \xi(\sigma) = ax + bz.$$

Por la fórmula de variación de parámetros, se observa que

$$\begin{aligned} \phi(\tau, \sigma, ax + bz, a\omega + b\nu) &= \xi(\tau) \\ &= \Phi(\tau, \sigma)(ax + bz) + \int_{\sigma}^{\tau} \Phi(\tau, s)B(s)(a\omega + b\nu)(s) ds \\ &= a \left(\Phi(\tau, \sigma)x + \int_{\sigma}^{\tau} \Phi(\tau, s)B(s)\omega(s) ds \right) + b \left(\Phi(\tau, \sigma)z + \int_{\sigma}^{\tau} \Phi(\tau, s)B(s)\nu(s) ds \right) \\ &= a\phi(\tau, \sigma, x, \omega) + b\phi(\tau, \sigma, z, \nu) \end{aligned}$$

lo que prueba que $\phi(\tau, \sigma, \cdot, \cdot) : \mathcal{X} \times L^1([\sigma, \tau], \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathcal{X}$ es lineal. $\square$

Se necesitan los siguientes resultados antes de probar el Lema A.1.30.

Lema A.1.26. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ medible, y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función, entonces f es medible si y solo si $f^{-1}(B)$ es medible para toda caja abierta B (producto cartesiano de intervalos abiertos) [59, Ej. 7.5.1]. $\lrcorner$

Prueba. $\Rightarrow$) Supóngase que f es medible, entonces para toda caja abierta B se tiene que $f^{-1}(B)$ es medible en Ω .

$\Leftarrow$) Supóngase que para toda caja abierta B se tiene que $f^{-1}(B)$ es medible. Sea $U \subseteq \mathbb{R}^m$ abierto, usando que todo abierto en $\mathbb{R}^m$ es unión a lo más numerable de cajas abiertas [59, Lema 7.4.10], se tiene que $U = \bigcup_{j \in I} B_j$, con $|I| \leq |\mathbb{N}|$, $B_j = \prod_{i=1}^m (a_i^j, b_i^j)$, $a_i^j, b_i^j \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, $a_i^j < b_i^j$ para todo $i \in \overline{m}$ y todo $j \in I$, entonces, $f^{-1}(U) = f^{-1}\left(\bigcup_{j \in I} B_j\right) = \bigcup_{j \in I} f^{-1}(B_j)$, y como $f^{-1}(B_j)$ es medible para todo $j \in I$ por hipótesis, se tiene que $f^{-1}(U)$ es unión a lo más numerable de conjuntos medibles y este es un conjunto medible (propiedad de σ -álgebra). $\square$

Lema A.1.27. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ medible, y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Entonces, f es medible si y solo si $f^{-1}((a, \infty)) := \{x \in \Omega \mid f(x) > a\}$ es medible para cada $a \in \mathbb{R}$ [59, Ej. 7.5.4]. $\lrcorner$

Prueba. $\Rightarrow$) Si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es medible, entonces $f^{-1}((a, \infty))$ es medible, pues (a, ∞) es abierto y esto ocurre para todo $a \in \mathbb{R}$.

$\Leftarrow$) Supóngase que $f^{-1}((a, \infty)) := \{x \in \Omega \mid f(x) > a\}$ es medible para cada $a \in \mathbb{R}$, entonces el complemento es medible, es decir $\Omega \setminus f^{-1}((a, \infty)) = \{x \in \Omega \mid f(x) \leq a\}$ es medible para cada $a \in \mathbb{R}$. Por otra parte se observa que

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{ x \in \Omega \mid f(x) \leq a - \frac{1}{k} \right\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{ x \in \Omega \mid f(x) + \frac{1}{k} \leq a \right\} = \{x \in \Omega \mid f(x) < a\},$$

⁵Dado que $L^\infty([\sigma, \tau]) \subset L^1([\sigma, \tau])$ para cualquier $\sigma < \tau$ (Obs. 2.1.8), también se tiene que Σ también es completo respecto al conjunto de los controles localmente esencialmente acotados y medibles.

ya que $\frac{1}{k} \rightarrow 0$. Por lo tanto $\{x \in \Omega \mid f(x) < a\} = f^{-1}(-\infty, a)$ también es medible para toda a , pues es una unión numerable de los conjuntos $\{x \in \Omega \mid f(x) \leq a - \frac{1}{k}\}$ medibles por hipótesis. Con lo anterior en cuenta, sea $(c, d) \subset \mathbb{R}$, se tiene que

$$f^{-1}((c, d)) = \{x \in \Omega \mid c < f(x) < d\} = f^{-1}(c, \infty) \cap f^{-1}(-\infty, d).$$

Entonces $f^{-1}((c, d))$ es la intersección de dos conjuntos medibles y por lo tanto es medible, por el Lema A.1.26, se tiene que f es medible. $\square$

Teorema A.1.28. Sea L la σ -álgebra de Lebesgue y sea $E \subset \mathbb{R}$, si $E \in L$ entonces

$$\begin{aligned} m(E) &= \inf\{m(U) \mid U \supset E \text{ y } U \text{ es abierto}\} \\ &= \sup\{m(K) \mid K \subset E \text{ y } K \text{ es compacto}\} \end{aligned} \quad [58, \text{Teo. 1.18}]$$

Corolario A.1.29. Sea $E \subset \mathbb{R}$ medible con $m(E) > 0$, entonces existe K compacto tal que $m(K) > 0$ y $K \subset E$. $\lrcorner$

Prueba. Si $E \subset \mathbb{R}$ es medible con $m(E) > 0$, por el Teorema A.1.28, se tiene que $m(E) = \sup\{m(K) \mid K \subset E \text{ y } K \text{ es compacto}\}$. Por una equivalencia de la definición del supremo, se tiene que para toda $\varepsilon > 0$, existe $K \subset E$ compacto tal que $m(E) - \varepsilon < m(K)$. Eligiendo $\varepsilon = \frac{m(E)}{2}$, existe $K_0 \subset E$ compacto tal que $0 < \frac{m(E)}{2} = m(E) - \frac{m(E)}{2} < m(K_0)$. $\square$

Lema A.1.30. Sea $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ medible tal que $\int_a^x f = 0$ para todo $x \in [a, \infty)$, entonces $f(t) = 0$ p.c.t. $t \in [a, \infty)$. $\lrcorner$

Prueba. Por reducción al absurdo, supóngase que existe $E \subset [a, \infty)$ con $m(E) > 0$ tal que $f(t) \neq 0$ para todo $t \in E$. Se tiene que $E = E_1 \cup E_2$, con $E_1 := \{t \in E \mid f(t) > 0\}$ y $E_2 := \{t \in E \mid f(t) < 0\}$. En la demostración del Lema A.1.27 se vio que si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es medible, con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ medible, entonces los conjuntos $f^{-1}((a, \infty))$ y $f^{-1}((-\infty, a))$ son medibles para cada $a \in \mathbb{R}$, por lo tanto E_1 y E_2 son medibles.

Por la Proposición A.1.29, existe K compacto tal que $K \subset E_1$ y $m(K) > 0$. Por un lado $\int_K f > 0$, y por otro lado, por hipótesis se tiene que $\int_{[a, x]} f = 0$, para todo $x \geq a$, así

$$0 = \int_a^x f = \int_{[a, x] \setminus K} f + \int_K f.$$

Entonces $\int_{[a, x] \setminus K} f + \int_K f = 0$ con $\int_K f > 0$, esto implica que $\int_{[a, x] \setminus K} f = -\int_K f < 0$. Luego, $[a, \infty) \setminus K$ es abierto en $[a, \infty)$, por lo tanto es unión numerable de intervalos abiertos y disjuntos, es decir $[a, \infty) \setminus K = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (c_i, d_i)$ con $c_i, d_i \in [a, \infty)$, $c_i < d_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$, y si $j \neq i$ entonces $(c_i, d_i) \cap (c_j, d_j) = \emptyset$, luego, usando la propiedad de aditividad de la integral

$$0 > \int_{[a, \infty) \setminus K} f = \int_{\bigcup_{i \in \mathbb{N}} (c_i, d_i)} f = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{c_i}^{d_i} f.$$

Pero $\int_a^{d_i} f = \int_a^{c_i} f + \int_{c_i}^{d_i} f \Rightarrow \int_{c_i}^{d_i} f = \int_a^{d_i} f - \int_a^{c_i} f = 0 - 0 = 0$, pues por hipótesis

$\int_a^{d_i} f = 0$ y $\int_a^{c_i} f = 0$. Por tanto $\int_{c_i}^{d_i} f = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$ y así

$$0 > \sum_{i=1}^{\infty} \int_{c_i}^{d_i} f = 0 \Rightarrow 0 > 0 \text{ } \nexists.$$

Esto es una contradicción por lo tanto no existe $E_1 \subset [a, b]$ medible con $m(E_1) > 0$ tal que $f(t) > 0$ para todo $t \in E_1$. De manera análoga se llega a una contradicción para E_2 , por lo tanto debe de ocurrir que $f(t) = 0$ p.c.t. $t \in [a, \infty)$. $\square$

Proposición A.1.31. [p. 31] *El kernel $\tilde{K}$ de una comportamiento integral está determinado de manera única salvo un conjunto de medida cero [30, Ej. 2.7.9].* $\lrcorner$

Prueba. Sea Λ un comportamiento integral, entonces existe $\tilde{K}$ medible y localmente esencialmente acotada que cumple (2.24) y (2.25). Supóngase que existe $\tilde{K}^*$ medible y localmente esencialmente acotada que también cumple (2.24) y (2.25). Sean $\sigma, \tau \in \mathbb{R}$, $\sigma < \tau$. Para cada $j \in \overline{m}$ sea $\omega_j(t) = e_j$ para todo $t \in [\sigma, \tau)$ (función constante igual al vector canónico j -ésimo), así $\omega_j \in L^\infty([\sigma, \tau), \mathbb{R}^m)$. Sean $\tilde{K}(\tau, t) = (k_{lj}(\tau, t))$ y $\tilde{K}^*(\tau, t) = (k_{lj}^*(\tau, t))$ para $(l, j) \in \overline{p} \times \overline{m} := \{1, \dots, p\} \times \{1, \dots, m\}$. Por un lado $\tilde{K}(\tau, t)e_j$ es la j -ésima columna de la matriz $\tilde{K}(\tau, t)$, y lo mismo ocurre para $\tilde{K}^*(\tau, t)e_j$, luego

$$0 = \lambda^{\sigma, \tau}(\omega_j(t)) - \lambda^{\sigma, \tau}(\omega_j(t)) = \left(\int_{\sigma}^{\tau} k_{1j}(\tau, s) - k_{1j}^*(\tau, s) ds, \dots, \int_{\sigma}^{\tau} k_{pj}(\tau, s) - k_{pj}^*(\tau, s) ds \right).$$

Así, $\int_{\sigma}^{\tau} k_{lj}(\tau, s) - k_{lj}^*(\tau, s) ds = 0$ para todo $(l, j) \in \overline{p} \times \overline{m}$. Esto se cumple para cualquier valor $\tau \geq \sigma$, pues τ fue arbitrario, del Lema A.1.30 se sigue que $k_{lj}(\tau, t) = k_{lj}^*(\tau, t)$ p.c.t. $t \in [\sigma, \infty)$, y para todo $(l, j) \in \overline{p} \times \overline{m}$. Por tanto $\tilde{K}$ está determinado de manera única salvo un conjunto nulo en $[\sigma, \infty)$, y como $\sigma \in \mathbb{R}$ fue arbitrario, esto se cumple p.c.t. $(\tau, \sigma) \in \mathbb{R}^2$ tal que $\sigma \leq \tau$. $\square$

Proposición A.1.32. [p. 31] *Si Σ_f es lineal continuo y Λ es integral, entonces*

$$\Lambda_{\Sigma_f, 0} = \Lambda \iff \tilde{K} = C(t)\Phi(t, \sigma)B(\sigma) \text{ p.c.t. } (t, \sigma) \in \mathbb{R}^2, t \geq \sigma.$$

Por lo tanto, el comportamiento integral Λ es realizable, si y solo si existen matrices $A(t)$, $B(t)$ y $C(t)$ tales que las condiciones de arriba se cumplen⁶ [30, Ej. 2.7.10]. $\lrcorner$

Prueba. Por un lado sea $\Lambda = (\mathbb{R}, \mathcal{X}, \mathcal{U}, \kappa) = (\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m, \kappa)$ un comportamiento integral con $\kappa^{\sigma, \tau}(\omega) = \int_{\sigma}^{\tau} \tilde{K}(\tau, s)\omega(s) ds \quad \forall \sigma, \tau \in \mathbb{R}, \sigma \leq \tau$, para todo $\omega \in L^\infty([\sigma, \tau), \mathbb{R}^m)$.

Por otro lado sea $\Sigma_f = (\mathbb{R}, \mathcal{X}, \mathcal{U}, \phi)$ un sistema lineal continuo con salidas en $\mathcal{Y} = \mathbb{R}^p$, y sea $\Lambda_{\Sigma_f, 0} = (\mathbb{R}, \mathcal{U}, \mathcal{Y}, \lambda)$ el comportamiento del sistema inicializado $(\Sigma_f, 0)$. Por la Observación 2.2.30 se tiene que $\lambda^{\sigma, \tau}(\omega) = \int_{\sigma}^{\tau} C(\tau)\Phi(\tau, s)B(s)\omega(s) ds$.

Todo lo anterior se cumple únicamente suponiendo que Σ_f es lineal continuo y Λ es integral.

$\Rightarrow$) Supóngase que $\Lambda_{\Sigma_f, 0} = \Lambda$. Entonces $\kappa = \lambda$, y como el kernel está determinado de manera única salvo un conjunto nulo (Lema 2.2.31) se tiene que $C(t)\Phi(t, \sigma)B(\sigma) = \tilde{K}(t, \sigma)$ p.c.t. $(t, \sigma) \in \mathbb{R}^2$.

⁶Solo se considera el caso para $t \geq \sigma$, aunque también se puede considerar el caso general $t \in \mathbb{R}$ dado que $\Phi(t, s)$ está definida p.c.t. $(t, s) \in \mathbb{R}^2$.

$\Leftarrow$) Supóngase que $C(t)\Phi(t, \sigma)B(\sigma) = \tilde{K}(t, \sigma)$ p.c.t. $(t, \sigma) \in \mathbb{R}^2$, entonces para todo $\omega \in L^\infty([\sigma, \tau], \mathbb{R}^m)$ se tiene que $C(\tau)\Phi(\tau, s)B(s)\omega(s) = \tilde{K}(\tau, s)\omega(s)$ p.c.t. $s \in \mathbb{R}$, así

$$\lambda^{\sigma, \tau}(\omega) = \int_{\sigma}^{\tau} C(\tau)\Phi(\tau, s)B(s)\omega(s) ds = \int_{\sigma}^{\tau} \tilde{K}(\tau, s)\omega(s) ds = \kappa^{\sigma, \tau}(\omega),$$

esto ocurre para cualquier $\sigma, \tau \in \mathbb{R}$, $\sigma < \tau$, lo que prueba que $\Lambda_{\Sigma_f, 0} = \Lambda$. $\square$

Proposición A.1.33. [p. 31] *Un comportamiento lineal integral Λ es invariante en el tiempo si y solo si existe una matriz de funciones localmente esencialmente acotadas*

$$K \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}^{p \times m}), \text{ tal que } \tilde{K}(t, \tau) = K(t - \tau) \text{ p.c.t. } \tau \leq t \text{ [30, Ej. 2.7.11].}$$

Prueba. Sea $\Lambda = (\mathbb{R}, \mathcal{X}, \mathcal{U}, \lambda) = (\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m, \lambda)$ un comportamiento lineal integral continuo con kernel $\tilde{K}(t, \tau) = (k_{lj}(t, \tau))$ para $(l, j) \in \bar{p} \times \bar{m}$ y $\tau \leq t$.

$\Rightarrow$) Si Λ es invariante en el tiempo (Def. 2.2.4), entonces $\lambda^{\sigma, t}(\omega) = \lambda^{\sigma+\mu, t+\mu}(\mathbb{T}_\mu \omega)$ para cualquier $\mu, T, \sigma \in \mathbb{R}$ con $T \geq \sigma$ y cualquier $\omega \in L^\infty((\sigma, T), \mathbb{R}^m)$, en particular para $\omega_j = e_j$, función constante igual al vector canónico j -ésimo, se tiene que

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda^{\sigma+\mu, T+\mu}(\mathbb{T}_\mu \omega_j) - \lambda^{\sigma, T}(\omega_j) = \int_{\sigma+\mu}^{T+\mu} \tilde{K}(T+\mu, s)e_j ds - \int_{\sigma}^T \tilde{K}(T, s)e_j ds \\ &= \int_{\sigma}^T \tilde{K}(T+\mu, u+\mu)e_j du - \int_{\sigma}^T \tilde{K}(T, s)e_j ds \quad (u = s - \mu) \\ &= \left(\int_{\sigma}^T k_{1j}(T+\mu, s+\mu) - k_{1j}(T, s) ds, \dots, \int_{\sigma}^T k_{pj}(T+\mu, s+\mu) - k_{pj}(T, s) ds \right). \end{aligned}$$

De modo que $\int_{\sigma}^T k_{lj}(T+\mu, s+\mu) - k_{lj}(T, s) ds = 0$ para todo $(l, j) \in \bar{p} \times \bar{m}$, y como $T \geq \sigma$ fue arbitrario, por el Lema A.1.30 se sigue que $k_{lj}(T+\mu, \tau+\mu) = k_{lj}(T, \tau)$ p.c.t. $\tau \in [\sigma, \infty)$, lo que prueba que $\tilde{K}(t+\mu, \tau+\mu) = \tilde{K}(t, \tau)$ p.c.t. $\tau \in [\sigma, \infty)$, para todo $t \geq \sigma$ fijo, y para todo $\mu \in \mathbb{R}$. En particular, tomando $\mu = -\tau$ se tiene que $\tilde{K}(t-\tau, 0) = \tilde{K}(t, \tau)$ p.c.t. $\tau \in [\sigma, t]$. De esta forma se puede definir $K: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^{p \times m}$, $x \mapsto K(x) := \tilde{K}(x, 0)$. Por un lado $K \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}^{p \times m})$ ⁷, y por otro lado $K(t-\tau) := \tilde{K}(t-\tau, 0) = \tilde{K}(t, \tau)$ p.c.t. $\tau \leq t$, por lo que K cumple los requerimientos de la proposición.

$\Leftarrow$) Supóngase que existe $K \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}^{p \times m})$ tal que $\tilde{K}(t, \tau) = K(t - \tau)$ p.c.t. $\tau \in (-\infty, t]$. Entonces para cualquier $\omega \in L^\infty((\sigma, t), \mathbb{R}^m)$ se tiene que

$$\lambda^{\sigma, t}(\omega) \underset{\text{hipótesis}}{=} \int_{\sigma}^t K(t-s)\omega(s) ds = \int_{\sigma+\mu}^{t+\mu} \tilde{K}(t+\mu, u)\omega(u-\mu) du = \lambda^{\sigma+\mu, t+\mu}(\mathbb{T}_\mu \omega).$$

(cambio de var. $u = s + \mu$, hip. y def.)

Por tanto, $\lambda^{\sigma, t}(\omega) = \lambda^{\sigma+\mu, t+\mu}(\mathbb{T}_\mu \omega)$, lo que prueba que Λ es invariante en el tiempo. $\square$

⁷Esto ocurre porque en general, el kernel $\tilde{K}(\tau, \sigma)$ de un comportamiento integral, está definido siempre que $\sigma \leq \tau$, en este caso $K(x) := \tilde{K}(x, 0)$ está definida para toda $x \geq 0$.

§2.3

Proposición A.1.34. [p. 37] Sea $K = (k_{lr}) \in M(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{p \times m})$ con $(l, r) \in \bar{p} \times \bar{m}$. Se cumple lo siguiente:

- (a) Si existe una función $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\|K(t)\| \leq g(t)$ p.c.t. $t \in \mathbb{R}$, entonces existe $c \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $|k_{lr}(t)| \leq cg(t)$ p.c.t. $t \in \mathbb{R}$, $(l, r) \in \bar{p} \times \bar{m}$. De manera inversa, si existe una función $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $|k_{lr}(t)| \leq g(t)$ p.c.t. $t \in \mathbb{R}$, entonces existe $c \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $\|K(t)\| \leq cg(t)$ p.c.t. $t \in \mathbb{R}$.
- (b) $\int_{\mathbb{R}} \|K\| < \infty$ (es decir, K es integrable) si y solo si k_{lr} es integrable para toda $(l, r) \in \bar{p} \times \bar{m}$.
- (c) Si K es integrable, entonces existe $c \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $\|\int_{\mathbb{R}} K\| \leq c \int_{\mathbb{R}} \|K\|$.
- (d) Si A_k es una sucesión en $\mathbb{C}^{p \times m}$ con $A_k = (a_{lr}^k)$ tal que $A_k \rightarrow A$ con $A = (a_{lr})$, entonces $a_{lr}^k \rightarrow a_{lr}$ para toda $(l, r) \in \bar{p} \times \bar{m}$. $\square$

Prueba. Sea $K = (k_{lr}) \in M(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{C}^{p \times m})$, $A_k = (a_{lr}^k)$ una sucesión en $\mathbb{C}^{p \times m}$ y $A = (a_{lr}) \in \mathbb{C}^{p \times m}$ con $(l, r) \in \bar{p} \times \bar{m}$. Se define

$$\|\cdot\|_q : \mathbb{C}^{p \times m} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad B = (b_{lr}) \mapsto \left(\sum_{l=1}^p \sum_{r=1}^m |b_{lr}|^q \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (\text{A.23})$$

Esta es una norma en $\mathbb{C}^{p \times m}$ para cada $q \in [1, \infty)$, pues cada $B = (b_{lr}) \in \mathbb{C}^{p \times m}$ se puede identificar con un elemento $\hat{b} \in \mathbb{C}^{pm}$, cuya norma $\|\cdot\|_q^{\mathbb{C}^{pm}} := \left(\sum_{r=1}^{pm} |\hat{b}_r|^q \right)^{\frac{1}{q}}$ coincide con la mencionada en (A.23). También se cumple que $|b_{lr}| \leq \|B\|_q$ para toda $(l, r) \in \bar{p} \times \bar{m}$ y toda $q \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Como $\|\cdot\| := \max_{\{x \in \mathbb{C}^m \mid \|x\|=1\}} \|(\cdot)x\|$ y $\|\cdot\|_q$ son dos normas en un espacio vectorial de dimensión finita, por el Teorema A.1.3, para $q_0 \in [1, \infty)$ fija, toda siempre existen c, C reales positivos tales que

$$c\|B\| \leq \|B\|_{q_0} \leq C\|B\| \quad \forall B \in \mathbb{C}^{p \times m}. \quad (\text{A.24})$$

Con lo anterior en cuenta, se prueba cada afirmación de la proposición.

1. Si existe una función $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\|K(t)\| \leq g(t)$ p.c.t. $t \in \mathbb{R}$, por (A.24) existe $C \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que

$$\begin{aligned} |k_{lr}(t)| &\leq \|K(t)\|_1 \leq C\|K(t)\| \leq Cg(t) \\ \Rightarrow |k_{lr}(t)| &\leq Cg(t), \end{aligned}$$

esto último ocurre p.c.t. $t \in \mathbb{R}$, y toda $(l, r) \in \bar{p} \times \bar{m}$ lo que prueba la primer afirmación.

Ahora supóngase que existe una función $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $|k_{lr}(t)| \leq g(t)$ p.c.t. $t \in \mathbb{R}$. Primero, por (A.24) existe $c \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $c\|K(t)\| \leq \|K(t)\|_1$ para todo $t \in \mathbb{R}$, entonces

$$c\|K(t)\| \leq \|K(t)\|_1 = \sum_{l=1}^p \sum_{r=1}^m |k_{lr}(t)| \leq pm g(t).$$

Por tanto, $\|K(t)\| \leq \frac{pm}{c}g(t)$ p.c.t. $t \in \mathbb{R}$ y con esto concluye la prueba de (a).

2. $\Rightarrow$) Supóngase que K es integrable, es decir $\int_{\mathbb{R}} \|K(t)\| dt < \infty$. Por (A.24) existe $C \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $|k_{lr}(t)| \leq \|K(t)\|_1 \leq C\|K(t)\|$ para toda $t \in \mathbb{R}$, y por tanto para toda $(l, r) \in \bar{p} \times \bar{m}$ se cumple que

$$\int_{\mathbb{R}} |k_{lr}(t)| dt \leq \int_{\mathbb{R}} \|K(t)\|_1 dt \leq \int_{\mathbb{R}} C\|K(t)\| dt < \infty \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} |k_{lr}(t)| dt < \infty.$$

$\Leftarrow$) Supóngase que $\int_{\mathbb{R}} |k_{lr}(t)| dt < \infty$ para toda $(l, j) \in \bar{p} \times \bar{m}$. Por (A.24), existe $c \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $c\|K(t)\| \leq \|K(t)\|_1$ para toda $t \in \mathbb{R}$, por lo tanto

$$c \int_{\mathbb{R}} \|K(t)\| dt \leq \int_{\mathbb{R}} \|K(t)\|_1 dt = \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{l=1}^p \sum_{r=1}^m |k_{lr}(t)| \right) dt = \sum_{l=1}^p \sum_{r=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}} |k_{lr}(t)| dt \right) < \infty$$

por lo que $\int_{\mathbb{R}} \|K(t)\| dt < \infty$, y con esto se ha probado (b).

3. Supóngase que K es integrable, entonces, por el punto anterior cada entrada entrada de K es integrable. Luego, de la desigualdad del triángulo con el valor absoluto se tiene que $\left| \int_{\mathbb{R}} k_{lj}(t) dt \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |k_{lj}(t)| dt$ para toda $(l, j) \in \bar{p} \times \bar{m}$, por tanto

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^p \sum_{r=1}^m \left| \int_{\mathbb{R}} k_{lj}(t) dt \right| &\leq \sum_{l=1}^p \sum_{r=1}^m \int_{\mathbb{R}} |k_{lj}(t)| dt = \int_{\mathbb{R}} \sum_{l=1}^p \sum_{r=1}^m |k_{lj}(t)| dt \\ \Rightarrow \left\| \int_{\mathbb{R}} K(t) dt \right\|_1 &\leq \int_{\mathbb{R}} \|K(t)\|_1 dt. \end{aligned}$$

Por (A.24) existen $c, C \in \mathbb{R}_{>0}$ tales que

$$c \left\| \int_{\mathbb{R}} K(t) dt \right\| \leq \left\| \int_{\mathbb{R}} K(t) dt \right\|_1 \leq \int_{\mathbb{R}} \|K(t)\|_1 dt \leq C \int_{\mathbb{R}} \|K(t)\| dt,$$

de modo que $\left\| \int_{\mathbb{R}} K(t) dt \right\| \leq \frac{C}{c} \int_{\mathbb{R}} \|K(t)\| dt$.

4. Por último, si $A_k \rightarrow A$, entonces $\lim_{k \rightarrow \infty} \|A_k - A\| = 0$, y una vez más por (A.24), existe $C \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que

$$0 \leq |a_{lr}^k - a| \leq \|A_k - A\|_1 \leq C\|A_k - A\|,$$

por lo que

$$0 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} |a_{lr}^k - a| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|A_k - A\|_1 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} C\|A_k - A\| = 0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} |a_{lr}^k - a| = 0$$

Así se ha probado que $a_{lr}^k \rightarrow a_{lr}$ para toda $(l, r) \in \bar{p} \times \bar{m}$, y con esto concluye la prueba. $\square$

Proposición A.1.35. [p. 38] Sea $F \in L^1(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}^{p \times m})$, entonces $\hat{F}$ está definida (denotado $\hat{F}(s) < \infty$) para cualquier $s \in \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) = 0\}$. Si además F tiene orden exponencial

$\sigma > 0$, entonces $\hat{F}$ también está bien definida (al menos) en cualquier punto del semiplano complejo

$$\mathbb{C}_{\Re > \sigma} := \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > \sigma\}$$

Prueba. Sea $F \in L^1(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}^{p \times m})$ con $F = (f_{lj})$, $(l, j) \in \bar{p} \times \bar{m}$.

Sea $s = bi \in \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) = 0\}$, se observa que

$$|f_{lj}(t)e^{-ibt}| = |e^{-ibt}||f_{lj}(t)| = |f_{lj}(t)| \Rightarrow \hat{f}_{lj}(s) := \int_{\mathbb{R}_{>0}} |f_{lj}(t)e^{-ibt}| dt = \int_{\mathbb{R}_{>0}} |f_{lj}(t)| dt < \infty.$$

Como $s = bi \in \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) = 0\}$ y $(l, j) \in \bar{p} \times \bar{m}$ fueron arbitrarios, se tiene que $\hat{F}$ está bien definida para cualquier $s \in \mathbb{C}$ tal que $\Re(s) = 0$.

Por otra parte, supóngase que F tiene orden exponencial $\sigma \in \mathbb{R}_{>0}$, entonces por definición existe $M \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $\|F(t)\| \leq Me^{\sigma t}$ p.c.t. $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Por la Proposición A.1.34 (a), existe $c \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $|f_{lj}| \leq cMe^{\sigma t}$ para toda $(l, j) \in \bar{p} \times \bar{m}$.

Sea $s = a + ib \in \mathbb{C}$ con $a > \sigma$, luego

$$|f_{lj}(t)e^{-st}| = |f_{lj}(t)e^{-at}e^{-ibt}| = e^{-at}|f_{lj}(t)| \leq e^{-at}cMe^{\sigma t} = cMe^{(\sigma-a)t}.$$

Como $\sigma - a < 0$, se tiene que $\int_{\mathbb{R}_{>0}} cMe^{(\sigma-a)t} dt < \infty$ y así $\int_{\mathbb{R}_{>0}} |f_{lj}(t)e^{-st}| dt < \infty$, usando la desigualdad del triángulo para integrales en el caso complejo [70, Sec. 4.1], se puede asegurar que $\int_{\mathbb{R}_{>0}} f_{lj}(t)e^{-st} dt < \infty$ para toda $s \in \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > \sigma\}$ y todo $(l, j) \in \bar{p} \times \bar{m}$. $\square$

Proposición A.1.36. [p. 39] El espacio normado de matrices $\mathbb{C}^{p \times m}$ (con la norma (2.34)), cumple que $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ para todo $A, B \in \mathbb{C}^{p \times m}$. En particular

$$\|A^i\| \leq \|A\|^i \quad \forall A \in \mathbb{C}^{n \times n}, \forall i \in \mathbb{N}.$$

Prueba. Primero se observa que para toda $C \in \mathbb{C}^{p \times m}$, se tiene que $\|Cx\| \leq \|C\|\|x\|$ si $\|x\| = 1$, pues

$$\|Cx\| \leq \max_{\{x \in \mathbb{C}^m \mid \|x\|=1\}} \|Cx\| := \|C\| = \|C\|(1) = \|C\|\|x\|.$$

Por lo tanto si $A, B \in \mathbb{C}^{p \times m}$ y $\|x\| = 1$ se tiene que

$$\|ABx\| \leq \|A\|\|Bx\| \leq \|A\|\|B\|\|x\| = \|A\|\|B\|,$$

y en particular $\|AB\| := \max_{\{x \in \mathbb{C}^m \mid \|x\|=1\}} \|ABx\| \leq \|A\|\|B\| \Rightarrow \|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.

Ahora, si $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, procediendo por inducción, el caso base se cumple pues $\|A^0\| = \|I\| = 1 = \|A\|^0$, la hipótesis de inducción es que $\|A^i\| \leq \|A\|^i$ para alguna $i \in \mathbb{N}$ fija, por lo tanto

$$\begin{aligned} \|A^{i+1}\| &= \|A^i A\| \leq \|A^i\|\|A\| && \text{(propiedad probada)} \\ &\leq \|A\|^i \|A\| = \|A\|^{i+1}, && \text{(hipótesis inducción)} \end{aligned}$$

por lo que en efecto $\|A^i\| \leq \|A\|^i$ para toda $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ y toda $i \in \mathbb{N}$. $\square$

Lema A.1.37. *La función exponencial matricial*

$$e^{tA} := I + tA + \frac{t^2}{2}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \dots + \frac{t^j}{j!}A^j + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!}A^j, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

cumple que $\|e^{At}\| \leq e^{\|A\|t}$ para toda $t \in \mathbb{R}$. ┐

Prueba. Para cada $k \in \mathbb{N}$ y cada $t \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\left\| \sum_{j=0}^k \frac{t^j}{j!} A^j \right\| \leq \sum_{j=0}^k \|A^j\| \left| \frac{t^j}{j!} \right| \leq \sum_{j=0}^k \|A\|^j \left| \frac{t^j}{j!} \right| \quad (\text{Prop. A.1.36})$$

tomando los límites $k \rightarrow \infty$, para toda $t \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\|e^{At}\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \sum_{j=0}^k \frac{t^j}{j!} A^j \right\| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^k \|A\|^j \left| \frac{t^j}{j!} \right| = e^{\|A\|t}. \quad \square$$

Proposición A.1.38. *[p. 39] Sea $\omega \in L^1(\mathbb{R}_{>0})$ con orden exponencial σ , entonces la solución ξ de (2.35) dada por la fórmula de variación de parámetros $\xi(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} B \omega(\tau) d\tau$ tiene orden exponencial $\|A\|$. ┐*

Prueba. Supóngase que $\omega \in L^1(\mathbb{R}_{>0})$ tiene orden exponencial σ , entonces existe $M_1 \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $|\omega(\tau)| \leq M_1 e^{\sigma\tau}$ p.c.t. $\tau \in \mathbb{R}_{>0}$.

Primero se observa que

$$\begin{aligned} \|e^{A(t-\tau)} B \omega(\tau)\| &= \|e^{A(t-\tau)} B\| |\omega(\tau)| \\ &\leq M_1 \|B\| \|e^{A(t-\tau)}\| e^{\sigma\tau} \quad (\text{Prop. A.1.36}) \\ &\leq M_1 \|B\| e^{\|A\|(t-\tau)} e^{\sigma\tau} = M_1 \|B\| e^{\|A\|t} e^{-\tau(\sigma - \|A\|)}, \quad (\text{Lema A.1.37}) \end{aligned}$$

lo anterior se cumple p.c.t. $t \in \mathbb{R}_{>0}$, por tanto

$$\int_0^t \|e^{A(t-\tau)} B \omega(\tau)\| dt \leq M_1 \|B\| e^{\|A\|t} \int_0^t e^{-\tau(\sigma - \|A\|)} d\tau < \infty,$$

así se ha encontrado $M := M_1 \|B\| \int_0^t e^{-\tau(\sigma - \|A\|)} d\tau \in \mathbb{R}_{>0}$ y $\|A\| \in \mathbb{R}_{>0}$ tales que $\int_0^t \|e^{A(t-\tau)} B \omega(\tau)\| dt \leq M e^{\|A\|t}$ p.c.t. $t \in \mathbb{R}_{>0}$, por la Proposición A.1.34 (c), existe $c \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que

$$\|\xi(t)\| = \left\| \int_0^t e^{A(t-\tau)} B \omega(\tau) d\tau \right\| \leq c \int_0^t \|e^{A(t-\tau)} B \omega(\tau)\| dt \leq c M e^{\|A\|t} \quad \text{p.c.t. } t \in \mathbb{R}_{>0}.$$

Esto prueba que ξ tiene orden exponencial $\|A\|$. □

Para probar la Proposición A.1.40 se necesita el siguiente teorema.

Teorema A.1.39. *Sea $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Asíumase que $\det(H) \neq 0$, entonces H es invertible y se cumple que $H^{-1} = (\det(H))^{-1} ((-1)^{i+j} \det(H_{ij}))^T$, donde $((-1)^{i+j} \det(H_{ij}))^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$*

y $H_{ij} \in \mathbb{R}^{n-1 \times n-1}$ es la matriz que se obtiene al sustraer el i -ésimo reglón y la j -ésima columna de H [67, Teo. 8.1 (pp. 176, 177)]. $\lrcorner$

Proposición A.1.40. [p. 39] La función W descrita en (2.40), es racional, es decir $W(s) = q^{-1}(s)P(s)$ para algún $P \in \mathbb{R}^{p \times m}[s]$ de grado $n-1$, y para algún $q \in \mathbb{R}[s]$ mónico de grado n . $\lrcorner$

Prueba. Por el Teorema A.1.39 se tiene que

$$W(s) := C(sI - A)^{-1}B = (\det(sI - A))^{-1}C((-1)^{i+j}\det((sI - A)_{ij}))^T B.$$

El determinante $\det(sI - A)$ es el polinomio característico de A en s , por lo que es mónico y de grado n [67, p. 201]. Por otro lado cada determinante $(-1)^{i+j}\det((sI - A)_{ij})$ es un polinomio de grado $n-1$ en s , es decir $\sum_{r=0}^{n-1} q_{r_{ij}} s^j = (-1)^{i+j}\det(A_{ij})$, para algunos $q_{r_{ij}} \in \mathbb{R}$, con $r \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, y para cada $(i, j) \in \bar{n} \times \bar{n}$, entonces

$$\begin{aligned} ((-1)^{i+j}\det((sI - A)_{ij}))^T &= \left(\begin{array}{ccc} \sum_{r=0}^{n-1} q_{r_{11}} s^j & \cdots & \sum_{r=0}^{n-1} q_{r_{1n}} s^j \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{r=0}^{n-1} q_{r_{n1}} s^j & \cdots & \sum_{r=0}^{n-1} q_{r_{nn}} s^j \end{array} \right)^T \\ &= \left(\sum_{r=0}^{n-1} \begin{pmatrix} q_{r_{11}} & \cdots & q_{r_{1n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{r_{n1}} & \cdots & q_{r_{nn}} \end{pmatrix} \right)^T s^r \\ &= P_0 + P_1 s + \dots + P_{n-1} s^{n-1} = \sum_{j=0}^{n-1} P_j s^j \in \mathbb{R}^{n \times n}[s], \end{aligned}$$

donde $P_r := (q_{r_{ij}})^T$ para toda $r \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, y así

$$C((-1)^{i+j}\det((sI - A)_{ij})) B = \sum_{j=0}^{n-1} C P_j B s^j \in \mathbb{R}^{p \times m}[s].$$

Tomando $q(s) := \det(sI - A)$ y $P(s) := \sum_{j=0}^{n-1} C P_j B s^j$ queda justificada la proposición. $\square$

Los siguientes resultados se usarán para probar el Teorema de convolución.

Lema A.1.41. Si f es medible en $\mathbb{R}^n$, entonces la función $\tilde{f}(x, y) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $\tilde{f}(x, y) := f(x - y)$ es medible en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ [142, Prop. 3.9]. $\lrcorner$

Lema A.1.42. Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ con orden exponencial $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ respectivamente, entonces $f * g$ tiene orden exponencial σ para cualquier $\sigma > \max\{\sigma_1, \sigma_2\}$. $\lrcorner$

Prueba. Supóngase que $f, g \in L^1(\mathbb{R}_{>0})$ tienen orden exponencial $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ respectivamente. Entonces para todo $t, \tau \in \mathbb{R}_{>0}$ tales que $t - \tau > 0$, existen $M_1, M_2 \in \mathbb{R}_{>0}$, tales que $|f(t - \tau)| \leq M_1 e^{\sigma_1(t - \tau)}$ y $|g(\tau)| \leq M_2 e^{\sigma_2 \tau}$.

Sea $\sigma > \max\{\sigma_1, \sigma_2\}$, de esta forma, como la función exponencial es creciente, ocurre que $|f(t - \tau)| \leq M_1 e^{\sigma_1(t-\tau)} \leq M_2 e^{\sigma(t-\tau)}$, por lo tanto

$$|f(t - \tau)g(\tau)| \leq M_1 M_2 e^{\sigma t - \sigma\tau + \sigma_2\tau} \Rightarrow |(f * g)(t)| \leq M_1 M_2 e^{\sigma t} \int_{\mathbb{R}_{>0}} e^{\tau(\sigma_2 - \sigma)} d\tau < \infty$$

ya que $\sigma_2 - \sigma < 0$, entonces definiendo $M := M_1 M_2 \int_{\mathbb{R}_{>0}} e^{\tau(\sigma_2 - \sigma)} d\tau \in \mathbb{R}_{>0}$, se han encontrado $\sigma > \max\{\sigma_1, \sigma_2\}$ y $M \in \mathbb{R}_{>0}$ tales que $|(f * g)(t)| \leq M e^{\sigma t}$, p.c.t. $t \in \mathbb{R}_{>0}$ lo que prueba que $f * g$ tiene orden exponencial σ para todo $\sigma > \max\{\sigma_1, \sigma_2\}$. $\square$

Teorema A.1.43. [Tonelli] Sean $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función medible y $1 \leq m < n$. Si $|f|^y : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $|f|^y := |f(x, y)|$ es integrable en $\mathbb{R}^m$ p.c.t. $y \in \mathbb{R}^{n-m}$ y la función $F : \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$F(y) := \int_{\mathbb{R}^m} |f|^y \quad \text{p.c.t. } y \in \mathbb{R}^{n-m}$$

es integrable, entonces f es integrable en $\mathbb{R}^n$ [55, Teo. 14.17]. $\lrcorner$

Teorema A.1.44. [Fubini] Sean $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ una función integrable y $1 \leq m < n$. Entonces existe un subconjunto nulo Z de $\mathbb{R}^{n-m}$ tal que, para todo $y \in \mathbb{R}^{n-m} \setminus Z$, la función $f^y : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ dada por $f^y(x) := f(x, y)$ es integrable. La función $F : \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$F(y) := \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^m} f^y & \text{si } y \in \mathbb{R}^{n-m} \setminus Z, \\ 0 & \text{si } y \in Z, \end{cases}$$

también es integrable y

$$\int_{\mathbb{R}^{n-m}} F = \int_{\mathbb{R}^n} f \quad [55, \text{Teo. 13.17}].$$

Esta última igualdad suele escribirse como $\int_{\mathbb{R}^n} f(y, z) dy dz = \int_{\mathbb{R}^{n-m}} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(y, z) dy \right) dz$. $\lrcorner$

Una consecuencia de este teorema (ver [55, Notación 13.18]) es que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(y, z) dy dz = \int_{\mathbb{R}^{n-m}} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(y, z) dz \right) dy,$$

y por tanto

$$\int_{\mathbb{R}^{n-m}} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(y, z) dy \right) dz = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-m}} f(y, z) dz \right) dy. \quad (\text{A.25})$$

Proposición A.1.45. [Teorema de convolución, p. 40] Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R}_{>0})$, si f y g tienen orden exponencial $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ respectivamente, entonces

$$\widehat{(f * g)}(s) = \hat{f}(s)\hat{g}(s) \quad \forall s \in \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > \max\{\sigma_1, \sigma_2\}\}. \quad \lrcorner$$

Prueba. Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R}_{>0})$, con ordenes exponenciales $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ respectivos y sea $s \in \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(s) > \max\{\sigma_1, \sigma_2\}\}$. S.p.g. se pueden considerar $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ con la extensión trivial.

Se define

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{C} \\ (\tau, t) &\mapsto h(\tau, t) := f(t - \tau)g(\tau)e^{-st}. \end{aligned}$$

Se busca aplicar los teoremas de Tonelli y Fubini tanto a la parte real como a la parte imaginaria de h . Se procede con la parte real de h ⁸:

$$\begin{aligned} \Re h : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\tau, t) &\mapsto \Re h(\tau, t) = f(t - \tau)g(\tau) \Re e^{-st}. \end{aligned}$$

Como $f \in L^1(\mathbb{R})$, en particular f es medible, y por el Lema A.1.41 se tiene que $\tilde{f}(t, \tau) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\tilde{f}(t, \tau) := f(t - \tau)$ es medible.

Luego, sea $\pi_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\pi_2(t, \tau) = \tau$ y sea $\tilde{g} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\tilde{g}(t, \tau) := g(\tau)$, de esta forma $\tilde{g} = \pi_2 \circ g$. Sea $a \in \mathbb{R}$, como $g \in L^1(\mathbb{R})$ es medible, se tiene que $g^{-1}((a, \infty))$ es medible (Lema A.1.27), por lo tanto

$$\tilde{g}^{-1}((a, \infty)) = (\pi_2 \circ g)^{-1}((a, \infty)) = \pi_2^{-1}(g^{-1}((a, \infty))) = \mathbb{R} \times (a, \infty)$$

es medible en $\mathbb{R}^2$ (pues es el producto cartesiano de dos conjuntos medibles), como a fue arbitraria, nuevamente por el Lema A.1.27 se puede asegurar $\tilde{g}(t, \tau) := g(\tau)$ es medible en $\mathbb{R}^2$.

Como $\Re e^z$ es continua en $\mathbb{R}$, en particular es medible, y de la misma forma para el caso de g , se llega a que $\Re e^{-st} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\Re e^{-st}(t, \tau) := \Re e^{-st}$ es medible en $\mathbb{R}^2$.

Como $\tilde{f}$, $\tilde{g}$ y $\Re e^{-st}$ son medibles en $\mathbb{R}^2$, por el Lema 2.1.4 se tiene que el producto

$$\tilde{f} \tilde{g} \Re e^{-st} = f(t - \tau)g(\tau) \Re e^{-st} = \Re h(t, \tau)$$

es medible en $\mathbb{R}^2$.

Ahora se asegura que la función $|\Re h|^t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $|\Re h|^t(\tau) := |\Re h(t, \tau)|$, es integrable en $\mathbb{R}$ p.c.t. $t \in \mathbb{R}$, pues

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |\Re h|^t(\tau) d\tau &= \int_{\mathbb{R}} |\Re h(t, \tau)| d\tau \\ &= \int_{\mathbb{R}} |f(t - \tau)g(\tau) \Re e^{-st}| d\tau \\ &= |\Re e^{-st}| \int_{\mathbb{R}} |f(t - \tau)g(\tau)| d\tau \\ &= |\Re e^{-st}| (f * g)(t) \end{aligned}$$

y como la Proposición 2.3.7 1 asegura que $(f * g)(t)$ está bien definida p.c.t. $t \in \mathbb{R}$, se tiene que $|\Re e^{-st}| (f * g)(t) < \infty$ p.c.t. $t \in \mathbb{R}$ y así $|\Re h|^t(\tau)$ es integrable p.c.t. $t \in \mathbb{R}$. Lo único que falta por verificar para poder aplicar el Teorema de Tonelli, es mostrar que la función $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$H(t) := \int_{\mathbb{R}} |\Re h|^t(\tau) d\tau \quad \text{p.c.t. } t \in \mathbb{R}$$

⁸El argumento para la parte imaginaria es similar y se omite.

es integrable. Entonces

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} H(t) dt &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |\Re h|^t(\tau) d\tau dt = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(t-\tau)g(\tau)| \Re e^{-st} d\tau dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} |\Re e^{-st}| \int_{\mathbb{R}} |f(t-\tau)g(\tau)| d\tau dt = \Re \mathcal{L}\{|f * g|\}(s), \end{aligned}$$

por lo tanto, la integral de H es la parte real de la transformada de Laplace de la convolución $f * g \in L^1(\mathbb{R})$ (Proposición 2.3.7 1), cuya convergencia la garantiza el Lema A.1.42 y la Proposición A.1.35, para todo $s \in \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > \max\{\sigma_1, \sigma_2\}\}$, así se puede asegurar que $\int_{\mathbb{R}} H(t) dt$ es integrable. Por el Teorema de Tonelli se puede asegurar que $\Re h$ es integrable en $\mathbb{R}^2$ y por el Teorema de Fubini y lo mencionado en (A.25), se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(t-\tau)g(\tau) \Re e^{-st} d\tau \right) dt = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(t-\tau)g(\tau) \Re e^{-st} dt \right) d\tau. \quad (\text{A.26})$$

Con lo anterior en cuenta, se tiene que

$$\begin{aligned} \Re \widehat{(f * g)}(s) &:= \Re \int_{\mathbb{R}} (f * g)(t) e^{-st} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(t-\tau)g(\tau) \Re e^{-st} d\tau \right) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(t-\tau)g(\tau) \Re e^{-st} dt \right) d\tau \quad (\text{A.26}) \\ &= \int_{\mathbb{R}} g(\tau) \left(\int_{\mathbb{R}} f(t-\tau) \Re e^{-st} dt \right) d\tau \\ &= \int_{\mathbb{R}} g(\tau) \left(\int_{\mathbb{R}} f(u) \Re e^{-s(u+\tau)} du \right) d\tau \quad (u = t - \tau) \\ &= \int_{\mathbb{R}} g(\tau) \Re e^{-s\tau} \left(\int_{\mathbb{R}} f(u) \Re e^{-su} du \right) d\tau \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}} f(u) \Re e^{-su} du \right) \left(\int_{\mathbb{R}} g(\tau) \Re e^{-s\tau} d\tau \right) \\ &= \Re \hat{f}(s) \hat{g}(s). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\Re \widehat{(f * g)}(s) = \Re \hat{f}(s) \hat{g}(s) \quad \forall s \in \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > \max\{\sigma_1, \sigma_2\}\},$$

y como el caso imaginario es completamente análogo, se tiene que

$$\widehat{(f * g)}(s) = \hat{f}(s) \hat{g}(s) \quad \forall s \in \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > \max\{\sigma_1, \sigma_2\}\},$$

que es lo que se buscaba. □

Proposición A.1.46. [p. 40] Sean $K \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{p \times m})$ y $\omega \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$, si K y ω tienen orden exponencial $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ respectivamente, entonces

$$\widehat{(K * \omega)}(s) = \hat{K}(s) \hat{\omega}(s) \quad \forall s \in \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > \max\{\sigma_1, \sigma_2\}\}. \quad \lrcorner$$

Prueba. Sean $K = (k_{lj}) \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{p \times m})$, $(l, j) \in \bar{p} \times \bar{m}$ y $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_m) \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$, con orden exponencial σ_1 y σ_2 respectivamente, y sea $s \in \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > \max\{\sigma_1, \sigma_2\}\}$, se tiene que

$$\begin{aligned}
 \widehat{(K * \omega)}(s) &= \int_{\mathbb{R}_{>0}} (K * \omega)(t) e^{-st} dt \\
 &= \int_{\mathbb{R}_{>0}} \left(\sum_{j=1}^m \int_{\mathbb{R}} k_{1,j}(t-s) \omega_j(s) ds, \dots, \sum_{j=1}^m \int_{\mathbb{R}} k_{p,j}(t-s) \omega_j(s) ds \right) e^{-st} dt \\
 &= \int_{\mathbb{R}_{>0}} \left(\left(\sum_{j=1}^m (k_{1,j} * \omega_j)(t), \dots, \sum_{j=1}^m (k_{p,j} * \omega_j)(t) \right) e^{-st} \right) dt \\
 &= \left(\int_{\mathbb{R}_{>0}} \sum_{j=1}^m (k_{1,j} * \omega_j)(t) e^{-st} dt, \dots, \int_{\mathbb{R}_{>0}} \sum_{j=1}^m (k_{p,j} * \omega_j)(t) e^{-st} dt \right) \\
 &= \left(\sum_{j=1}^m \int_{\mathbb{R}_{>0}} (k_{1,j} * \omega_j)(t) e^{-st} dt, \dots, \sum_{j=1}^m \int_{\mathbb{R}_{>0}} (k_{p,j} * \omega_j)(t) e^{-st} dt \right) \\
 &= \left(\sum_{j=1}^m \widehat{(k_{1,j} * \omega_j)}(s), \dots, \sum_{j=1}^m \widehat{(k_{p,j} * \omega_j)}(s) \right) \\
 &= \left(\sum_{j=1}^m \hat{k}_{1,j}(s) \hat{\omega}_j(s), \dots, \sum_{j=1}^m \hat{k}_{p,j}(s) \hat{\omega}_j(s) \right) \quad (\text{Prop. A.1.45}) \\
 &= \begin{pmatrix} \hat{k}_{1,1}(s) & \dots & \hat{k}_{1,m}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{k}_{p,1}(s) & \dots & \hat{k}_{p,m}(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\omega}_1(s) \\ \vdots \\ \hat{\omega}_m(s) \end{pmatrix} \\
 &= \hat{K}(s) \hat{\omega}(s). \quad \square
 \end{aligned}$$

Los siguientes dos lemas servirán para probar la Proposición A.1.49.

Lema A.1.47. Si $f \in L^1(\mathbb{R}_{\geq 0})$, entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_t^\infty |f(\tau)| d\tau = 0$. ┐

Prueba. Supóngase que $f \in L^1(\mathbb{R}_{\geq 0})$. Sea (x_k) una sucesión en $\mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que $x_k \rightarrow \infty$, considérese la sucesión de funciones $g_k : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$, donde $g_k(\tau) = 1_{(x_k, \infty)}(\tau) f(\tau)$ donde $1_{(x_k, t)}(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{si } \tau \in (x_k, t) \\ 0 & \text{si } \tau \in \mathbb{R}_{\geq 0} \setminus (x_k, t) \end{cases}$ (función característica o indicadora del conjunto $(x_k, t) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$). g_k es medible para toda $k \in \mathbb{N}$ pues es producto de dos funciones medibles (Lema 2.1.4-2).

Sean $\varepsilon > 0$ y $\tau_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, como $x_k \rightarrow \infty$, siempre existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n > \tau_0$ para toda $n \geq N$, por tanto $g_n(\tau_0) = 0$ para toda $n \geq N$ y así $|g_n(\tau_0) - 0| < \varepsilon$, lo que prueba que $\lim_{k \rightarrow \infty} g_k(\tau) = 0$ (convergencia puntual).

Por otra parte $|g_k(\tau)| = |1_{(x_k, \infty)}(\tau) f(\tau)| \leq |f(\tau)|$ y como $f \in L^1(\mathbb{R}_{\geq 0})$, entonces $|f| \in L^1(\mathbb{R}_{\geq 0})$ [55, Prop. 12.32 (b)], por tanto se cumplen las hipótesis del Teorema 2.3.22 de

convergencia dominada, y se puede asegurar que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^\infty |g_k(t) - 0| = 0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{x_k}^\infty |f(\tau)| d\tau = 0,$$

esto último implica que $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_t^\infty |f(\tau)| d\tau = 0^9$, que es lo que se buscaba. $\square$

Lema A.1.48. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, si $\lim_{t \rightarrow \infty} |f(t)| = 0$, entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$. $\lrcorner$

Prueba. Como $0 \leq |\Re f(t)| \leq |f(t)|$ para toda $t \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$0 \leq \lim_{t \rightarrow \infty} |\Re f(t)| \leq \lim_{t \rightarrow \infty} |f(t)| = 0,$$

y por el teorema del sándwich para límites, se tiene que $\lim_{t \rightarrow \infty} |\Re f(t)| = 0$, luego, nuevamente por el sándwich:

$$\begin{aligned} -|\Re f(t)| \leq \Re f(t) \leq |\Re f(t)| &\Rightarrow 0 = -\lim_{t \rightarrow \infty} |\Re f(t)| \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \Re f(t) \leq \lim_{t \rightarrow \infty} |\Re f(t)| = 0 \\ &\Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \Re f(t) = 0. \end{aligned}$$

De manera completamente análoga se llega a que $\lim_{t \rightarrow \infty} \Im f(t) = 0$ y por tanto $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$ que es lo que se buscaba. $\square$

Proposición A.1.49. [p. 43] Sea $\Lambda = (\mathcal{T}, \mathcal{U}, \mathcal{Y}, \lambda) = (\mathbb{R}, \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p, \lambda)$ un comportamiento LIT continuo UBIBO con respuesta al impulso $K = (k_{lj})$, matriz de transferencia $W = (\hat{k}_{lj})$ y función de salida $\bar{\lambda} = (\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \dots, \bar{\lambda}_p)$.

Sean $l_0 \in \bar{p}$ y $j_0 \in \bar{m}$ fijos y considérese la entrada $\omega \in L_{loc}^1(\mathbb{R}_{\geq 0})$ donde

$$\omega(t) = (0, \dots, 0, \underbrace{\alpha \cos(2\pi\phi t + \theta)}_{j_0\text{-ésimo lugar}}, 0, \dots, 0),$$

para algunos $\alpha, \phi, \theta \in \mathbb{R}$. Sea $\hat{k}_{l_0 j_0}(i2\pi\phi) = re^{i\gamma}$ la entrada (l_0, j_0) de la matriz de transferencia expresada en forma polar para algunos $r, \gamma \in \mathbb{R}$. Entonces,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\bar{\lambda}_{l_0}(\omega)(t) - r\alpha \cos(2\pi\phi t + (\theta + \gamma))) = 0 \quad [30, \text{Lema 7.4.1}]. \quad \lrcorner$$

Prueba. Se dan por hechas las hipótesis y configuración de la Proposición A.1.49.

Para relajar notación sea $\kappa := k_{l_0 j_0}$ la entrada (l_0, j_0) de la RI, de este modo se cumple que $\hat{\kappa}(i2\pi\phi) := \hat{k}_{l_0 j_0}(i2\pi\phi) = re^{i\gamma}$.

Como Λ es UBIBO, su RI es integrable (Prop. 2.3.4) y por el Lema A.1.34 (b), κ es integrable, así el Lema A.1.47 asegura que $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_t^\infty |\kappa(\tau)| d\tau = 0$, además se cumple que

$$|\alpha \kappa(\tau) e^{i(2\pi\phi(t-\tau)+\theta)}| = |\alpha \kappa(\tau)| \underbrace{|e^{i(2\pi\phi(t-\tau)+\theta)}|}_{=1} = |\alpha \kappa(\tau)|, \text{ por lo que (usando la desigual-}$$

⁹Se usa el siguiente resultado: para toda función $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ se cumple que $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = a$ si y solo si $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = a$ para toda sucesión (x_k) en $\mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que $x_k \rightarrow \infty$ (ver por ejemplo <https://math.stackexchange.com/q/4668083>).

dad del triángulo para integrales)

$$0 \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \left| \int_t^\infty \kappa(\tau) \alpha e^{i(2\pi\phi(t-\tau)+\theta)} d\tau \right| \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \int_t^\infty |\alpha \kappa(\tau)| d\tau = 0,$$

luego, por el teorema del sándwich para límites: $\lim_{t \rightarrow \infty} \left| \int_t^\infty \kappa(\tau) \alpha e^{i(2\pi\phi(t-\tau)+\theta)} d\tau \right| = 0$, y por el Lema A.1.48: $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_t^\infty \kappa(\tau) \alpha e^{i(2\pi\phi(t-\tau)+\theta)} d\tau = 0$, de este último resultado se sigue que

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(0 - \int_t^\infty \kappa(\tau) \alpha e^{i(2\pi\phi(t-\tau)+\theta)} d\tau \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\int_0^t \kappa(\tau) \alpha e^{i(2\pi\phi(t-\tau)+\theta)} d\tau - \left(\int_0^t \kappa(\tau) \alpha e^{i(2\pi\phi(t-\tau)+\theta)} d\tau + \int_t^\infty \kappa(\tau) \alpha e^{i(2\pi\phi(t-\tau)+\theta)} d\tau \right) \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\int_0^t \kappa(\tau) \alpha e^{i(2\pi\phi(t-\tau)+\theta)} d\tau - \int_0^\infty \kappa(\tau) \alpha e^{i(2\pi\phi(t-\tau)+\theta)} d\tau \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\int_0^t \kappa(\tau) \alpha e^{i(2\pi\phi(t-\tau)+\theta)} d\tau - \alpha e^{i(2\pi\phi t + \theta)} \hat{\kappa}(i\phi) \right) \end{aligned}$$

se ha llegado a que $\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\int_0^t \kappa(\tau) \alpha e^{i(2\pi\phi(t-\tau)+\theta)} d\tau - r \alpha e^{i(2\pi\phi t + \theta + \gamma)} \right) = 0$ y en particular

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \Re \left(\int_0^t \kappa(\tau) \alpha e^{i(2\pi\phi(t-\tau)+\theta)} d\tau - r \alpha e^{i(2\pi\phi t + \theta + \gamma)} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\int_0^t \alpha \cos(2\pi\phi(t-\tau) + \theta) \kappa(\tau) d\tau - r \alpha \cos(2\pi\phi t + \theta + \gamma) \right) \quad (\text{fórmula de Euler}) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} ((\kappa * u)(t) - r \alpha \cos(2\pi\phi t + \theta + \gamma)) \quad (\text{conmutando la convolución}) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} (\bar{\lambda}_0(u)(t) - r \alpha \cos(2\pi\phi t + (\theta + \gamma))). \quad \square \end{aligned}$$

Proposición A.1.50. [Teorema de convolución (discreta), p. 44] Sean $f(t)$ y $u = (u_t) = u(t)$, $t \in \mathbb{N}$ sucesiones en $\mathbb{R}$. Si $s \in \mathbb{C}$ es tal que $\hat{f}(s) < \infty$ y $\hat{u}(s) < \infty$ en $\mathbb{R}$, entonces

$$\widehat{(f * u)}(s) = \hat{f}(s) \hat{u}(s). \quad \lrcorner$$

Prueba. Sean $f(t)$ y $u = (u_t) = u(t)$, $t \in \mathbb{N}$ sucesiones tales que $\hat{f}(s) < \infty$ y $\hat{u} < \infty$ para alguna $s \in \mathbb{C}$. La convolución $f * u$ es una sucesión en $\mathbb{R}$ donde el t -ésimo término está dado por $\sum_{j=0}^t f(t-j)u(j)$, por tanto

$$\begin{aligned} &\widehat{(f * u)}(s) \\ &= \sum_{t=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^t f(t-j)u(j) \right) s^{-t} s^{j-j} = \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{j=0}^t f(t-j) s^{-(t-j)} u(j) s^{-j} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\sum_{t=0}^k \sum_{j=0}^t F(t, j) \right] \quad (F(t, j) := f(t-j) s^{-(t-j)} u(j) s^{-j}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\sum_{j=0}^0 F(0, j) + \sum_{j=0}^1 F(1, j) + \dots + \sum_{j=0}^k F(k, j) \right] \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\sum_{j=0}^k F(j, 0) + \sum_{j=1}^1 F(j, 1) + \dots + \sum_{j=1}^k F(j, k) \right] \\
&\quad \text{(agrupando términos de la forma } F(j, 0), j \in \{0, \dots, k\} \text{ en una suma)} \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\sum_{j=0}^k F(j, 0) + \sum_{j=1}^{k-1} F(j, 1) + \sum_{j=2}^2 F(2, j) + \dots + \sum_{j=2}^k F(k, j) \right] \\
&\quad \text{(agrup. térm. de la forma } F(j, 1), j \in \{1, \dots, k-1\} \text{ en una suma)} \\
&\vdots \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\sum_{j=0}^k F(0, j) + \sum_{j=1}^{k-1} F(j, 1) + \sum_{j=2}^{k-2} F(j, 2) + \sum_{j=3}^{k-3} F(j, 3) + \sum_{j=4}^{k-4} F(j, 4) + \dots + F(k, k) \right] \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\sum_{l=0}^k \sum_{r=l}^{k-l} F(r, l) \right] \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\sum_{l=0}^k \sum_{r=l}^{k-l} f(r-l) s^{-(r-l)} u(l) s^{-l} \right] = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\sum_{l=0}^k u(l) s^{-l} \sum_{r=l}^{k-l} f(r-l) s^{-(r-l)} \right] \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\sum_{l=0}^k u(l) s^{-l} \sum_{\nu+l=l}^{k-l} f(\nu) s^{-\nu} \right] \quad (\nu = r-l \Rightarrow r = \nu + l) \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\sum_{l=0}^k u(l) s^{-l} \right] \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\sum_{\nu=0}^{k-l} f(\nu) s^{-\nu} \right] \quad (l \leq k) \\
&= \left(\sum_{l=0}^{\infty} u(l) s^{-l} \right) \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} f(\nu) s^{-\nu} \right) \\
&= \hat{u}(s) \hat{f}(s) = \hat{f}(s) \hat{u}(s). \quad \square
\end{aligned}$$

Proposición A.1.51. [Teorema de convolución (discreta) con matrices, p. 44] Sea $\mathcal{A}(t)$, una sucesión en $\mathbb{R}^{p \times m}$, y $u(t)$, una sucesión en $\mathbb{R}^m$. Si $s \in \mathbb{C}$ es tal que $\hat{\mathcal{A}}(s) < \infty$ y $u(s) < \infty$, entonces

$$\widehat{(\mathcal{A} * u)}(s) = \hat{\mathcal{A}}(s) \hat{u}(s) \quad \lrcorner$$

Prueba. Sean $\mathcal{A} = \mathcal{A}(t)(a_{lr}(t)), t \in \mathbb{N}, (l, r) \in \bar{p} \times \bar{m}$ una sucesión en $\mathbb{R}^{p \times m}$, y $u(t)(u_1(t), \dots, u_m(t))$ una sucesión en $\mathbb{R}^m$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\widehat{(\mathcal{A} * u)}(s) &= \sum_{t=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^t \mathcal{A}(t-j) u(j) \right) s^{-j} \\
&= \sum_{t=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^t \left(\sum_{r=1}^m a_{1,r}(t-j) u_r(j), \dots, \sum_{r=1}^m a_{p,r}(t-j) u_r(j) \right) \right) s^{-j}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{t=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^t \sum_{r=1}^m a_{1,r}(t-j)u_r(j), \dots, \sum_{j=0}^t \sum_{r=1}^m a_{p,r}(t-j)u_r(j) \right) s^{-j} \\
&= \sum_{t=0}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^m \sum_{j=0}^t a_{1,r}(t-j)u_r(j), \dots, \sum_{r=1}^m \sum_{j=0}^t a_{p,r}(t-j)u_r(j) \right) s^{-j} \\
&= \sum_{t=0}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^m (a_{1,r} * u_r)(t), \dots, \sum_{r=1}^m (a_{p,r} * u_r)(t) \right) s^{-j} \\
&= \left(\sum_{t=0}^{\infty} \sum_{r=1}^m (a_{1,r} * u_r)(t) s^{-j}, \dots, \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{r=1}^m (a_{p,r} * u_r)(t) s^{-j} \right) \\
&= \left(\sum_{r=1}^m \sum_{t=0}^{\infty} (a_{1,r} * u_r)(t) s^{-j}, \dots, \sum_{r=1}^m \sum_{t=0}^{\infty} (a_{p,r} * u_r)(t) s^{-j} \right) \\
&= \left(\sum_{r=1}^m \widehat{(a_{1,r} * u_r)}(s), \dots, \sum_{r=1}^m \widehat{(a_{p,r} * u_r)}(s) \right) \\
&= \left(\sum_{r=1}^m \hat{a}_{1,r}(s) \hat{u}_r(s), \dots, \sum_{r=1}^m \hat{a}_{p,r}(s) \hat{u}_r(s) \right) \quad (\text{Proposición A.1.50}) \\
&= \begin{pmatrix} \hat{a}_{1,1}(s) & \dots & \hat{a}_{1,m}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{a}_{p,1}(s) & \dots & \hat{a}_{p,m}(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u}_1(s) \\ \vdots \\ \hat{u}_m(s) \end{pmatrix} = \hat{\mathcal{A}}(s) \hat{u}(s). \quad \square
\end{aligned}$$

§2.4

Proposición A.1.52. [p. 53] Sean $\omega \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ y δ tal que cumplen las hipótesis del teorema de muestreo (incluyendo la necesaria para la convergencia uniforme). Se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}} \omega(t) dt = \delta \sum_{k=-\infty}^{\infty} \omega_{[\delta]}(k) = \int_{\mathbb{R}} \vec{\omega}_{[\delta]}(t) dt. \quad \lrcorner$$

Prueba. El teorema de muestreo asegura que $\omega(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \omega_{[\delta]}(k) \text{senc}\left(\frac{\pi}{\delta}(t - k\delta)\right)$ p.c.t. $t \in \mathbb{R}$, integrando en ambos lados, y usando que la convergencia es uniforme, se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \omega(t) dt &= \int_{\mathbb{R}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \omega_{[\delta]}(k) \text{senc}\left(\frac{\pi}{\delta}(t - k\delta)\right) dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \omega_{[\delta]}(k) \int_{\mathbb{R}} \text{senc}\left(\frac{\pi}{\delta}(t - k\delta)\right) dt \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \omega_{[\delta]}(k) \frac{\delta}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \text{senc}(u) du \quad (u = \frac{\pi}{\delta}(t - k\delta) \Rightarrow du = \frac{\pi}{\delta}) \\
&= \delta \sum_{k=-\infty}^{\infty} \omega_{[\delta]}(k) \quad (\int_{\mathbb{R}} \text{senc}(u) du = \pi) \quad \square
\end{aligned}$$

A.2. Demostraciones del Capítulo 4 y 5

Los siguientes dos lemas servirán para probar la Proposición A.2.3.

Lema A.2.1. Para cualquier $f \in \Re L_p^2(0, T)$, la función de autocorrelación r_f está bien definida y alcanza un punto máximo en $\tau = 0$. ┘

Prueba. Para cada $\tau \in \mathbb{R}$, sea $f_\tau(t) := f(t - \tau)$, dado que $f \in \Re L_p^2(0, T)$ es un espacio con producto escalar [74, Ejemplo 16.1.6], la desigualdad de Cauchy-Schwarz (DCS) [55, Prop. 15.2] aplica, por tanto

$$\begin{aligned}
 r_f(\tau) &= \langle f, f_\tau \rangle \underbrace{\leq}_{\text{DCS}} \|f\|_{L_p^2} \|f_\tau\|_{L_p^2}^{10} \\
 &= \sqrt{\int_0^T f^2(t) dt} \sqrt{\int_0^T f^2(t - \tau) dt} = \sqrt{\int_0^T f^2(t) dt} \underbrace{\sqrt{\int_{-\tau}^{T-\tau} f^2(u) du}}_{u=t-\tau \Rightarrow du=dt} \\
 &= \sqrt{\int_0^T f^2(t) dt} \underbrace{\sqrt{\int_0^T f^2(u) du}}_{f \text{ es periódica}} = \int_0^T f^2(t) dt = r_f(0).
 \end{aligned}$$

Dado que τ y f fueron arbitrarios, se tiene que $r_f(\tau) \leq r_f(0)$ para toda $\tau \in \mathbb{R}$ y para toda $f \in \Re L_p^2(0, T)$ que es lo que se afirmaba. □

Lema A.2.2. Si $f \in \Re L_p^2(0, T)$, entonces r_f también es periódica con mismo periodo T . ┘

Prueba.

$$r_f(\tau + nT) = \int_0^T f(t) f(t - (\tau + nT)) dt = \int_0^T f(t) f((t - \tau) - nT) dt = \underbrace{\int_0^T f(t) f(t - \tau) dt}_{f \text{ es periódica}} = r_f(\tau). \quad \square$$

Proposición A.2.3. [p. 105] Para toda $f \in \Re L_p^2(0, T)$, la función r_f está bien definida y alcanza puntos máximos en $\tau = nT$ con $n \in \mathbb{Z}$. ┘

Prueba. En el Lema A.2.1 se muestra que r_f está bien definida, y de este último y el Lema A.2.2 se sigue que $r_f(\tau) \leq r_f(0) = r_f(nT)$ para todo $\tau \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ y para todo $n \in \mathbb{Z}$, lo que prueba la afirmación. □

Los siguientes 8 lemas servirán para probar la Proposición A.2.12.

Lema A.2.4. Para todo $x \in \mathbb{R}^n$ si $1 \leq s \leq r < \infty$, entonces $\|x\|_r \leq \|x\|_s$ y $\|x\|_s \leq n^{\frac{r-s}{sr}} \|x\|_r$ [55, Ejer. 2.42. (a) y (b)]. ┘

¹⁰Esto también muestra que la función r_f está bien definida, pues $f, f_\tau \in \Re L_p^2(0, T)$, por lo que $\|f\|_{L_p^2} \|f_\tau\|_{L_p^2} < \infty$, y por tanto $r_f(\tau) < \infty$.

Prueba. Sea $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y $1 \leq s \leq r < \infty$. Si $r = s$ o $x = 0$, la prueba es inmediata, por lo que se supone $s < r$ y $x \neq 0$.

Por un lado, para $x_i \neq 0$ con $i \in \overline{n}$, se tiene que

$$|x_i| < |x_i| \Rightarrow \ln(|x_i|) < \ln(|x_i|) \Rightarrow s \ln(|x_i|) < r \ln(|x_i|) \Rightarrow e^{s \ln(|x_i|)} < e^{r \ln(|x_i|)} \Rightarrow |x_i|^s < |x_i|^r.$$

Como esto último ocurre para toda $i \in \overline{n}$ tal que $x_i \neq 0$, se tiene que $\sum_{k=1}^n |x_k|^s \leq \sum_{k=1}^n |x_k|^r$, y por lo tanto

$$s \ln \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^s \right) \leq r \ln \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^r \right) \Rightarrow \exp \left(s \ln \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^s \right) \right) \leq \exp \left(r \ln \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^r \right) \right) \Rightarrow \|x\|_r \leq \|x\|_s.$$

Por otra lado, se puede definir $p = \frac{r}{r-s}$ y $q = \frac{r}{s}$, así $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{r-s}{r} + \frac{s}{r} = 1$, y además $p, q \in (1, \infty)$ pues

$$\begin{aligned} 1 \leq s \leq r &\Rightarrow 0 \leq r-s < r \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{r} < \frac{1}{r-s} \Rightarrow 1 < \frac{r}{r-s} = p \Rightarrow p \in (1, \infty), \text{ y} \\ 1 \leq s < r &\Rightarrow 1 < \frac{r}{s} = q \Rightarrow q \in (1, \infty). \end{aligned}$$

Usando la desigualdad de Hölder en $\mathbb{R}^n$ (ver [55, Prop. 2.12]) para los vectores $\hat{1} = (1, \dots, 1)$ y $w = (|x_1|^s, \dots, |x_n|^s)$ en $\mathbb{R}^n$ y los valores definidos $p = \frac{r}{r-s}$ y $q = \frac{r}{s}$, se puede asegurar que

$$\|\hat{1}w\|_1 \leq \|\hat{1}\|_p \|w\|_q,$$

donde $\hat{1}w := (1|x_1|^s, \dots, 1|x_n|^s)$, luego

$$\begin{aligned} \|\hat{1}w\|_1 &\leq \|\hat{1}\|_p \|w\|_q \Rightarrow \sum_{i=1}^n |1|x_i|^s| \leq \left(\sum_{i=1}^n |1|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n ||x_i|^s|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\Rightarrow \sum_{i=1}^n |x_i|^s \leq n^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^{sq} \right)^{\frac{1}{q}} \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^s \right)^{\frac{1}{s}} \leq \left(n^{\frac{1}{p}} \right)^{\frac{1}{s}} \left(\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^r \right)^{\frac{1}{q}} \right)^{\frac{1}{s}} \\ &\Rightarrow \|x\|_s \leq n^{\frac{r-s}{rs}} \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^r \right)^{\frac{1}{r}} = n^{\frac{r-s}{rs}} \|x\|_r. \end{aligned}$$

Es decir $\|x\|_s \leq n^{\frac{r-s}{rs}} \|x\|_r$, que es lo que se buscaba. $\square$

Lema A.2.5. Si $f \in C_c^0(\mathbb{R}^n)$, entonces f es uniformemente continua (UC) en $\mathbb{R}^n$ [55, Ej. 11.39]. $\lrcorner$

Prueba. Sean $f \in C_c^0(\mathbb{R}^n)$, $\varepsilon > 0$ y $\hat{x}, \hat{y} \in \mathbb{R}^n$ con $\hat{x} = (x_1, \dots, x_n)$ y $\hat{y} = (y_1, \dots, y_n)$. Como $\text{sop}(f)$ es compacto, $\text{sop}(f) \subset [-r, r]^n$ para algún $r \in \mathbb{R}_{>0}$ suficientemente grande. f es continua en todo su dominio, en particular lo es en $[-r, r]^n$, por lo tanto es UC en $[-r, r]^n$ ¹¹, así, para la ε en cuestión, se tiene que para cualquier $\hat{z}, \hat{w} \in [-r, r]^n$ existe $\delta_0 > 0$ tal que $\|\hat{z} - \hat{w}\|_2 < \delta_0 \Rightarrow |f(\hat{z}) - f(\hat{w})| < \varepsilon$. Considerando el cubo cerrado $Q = [-r - n^{\frac{1}{2}}\delta_0, r + n^{\frac{1}{2}}\delta_0]^n$, y nuevamente usando la equivalencia entre continuidad y

¹¹En un espacio métrico compacto (K, d) , continuidad es equivalente a continuidad uniforme (ver [55, Teo. 4.31]).

continuidad uniforme en compactos, para ε se tiene que para todo $\hat{z}, \hat{w} \in Q$, hay un δ_1 tal que $\|\hat{z} - \hat{w}\|_2 < \delta_1 \Rightarrow |f(\hat{z}) - f(\hat{w})| < \varepsilon$. Proponiendo $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1\}$ se deben tomar en cuenta cuatro casos.

CASO 1: $\hat{x}, \hat{y} \in Q$.

En este caso si $\|\hat{x} - \hat{y}\|_2 < \delta \leq \delta_1$, la continuidad uniforme en Q , garantiza que $|f(\hat{x}) - f(\hat{y})| < \varepsilon$.

CASO 2: $\hat{x}, \hat{y} \in \mathbb{R}^n \setminus Q$.

En este caso $\hat{x} \notin \text{sup}(f)$ y $\hat{y} \notin \text{sup}(f)$, pues $\text{sup}(f) \subset [-r, r]^n \subset Q$, por lo tanto (de la definición de soporte) $\|\hat{x} - \hat{y}\|_2 < \delta \Rightarrow |f(\hat{x}) - f(\hat{y})| = |0 - 0| = 0 < \varepsilon$ se cumple.

CASO 3: $\hat{x} \in Q$ y $\hat{y} \in \mathbb{R} \setminus Q$.

Suponiendo que $\|\hat{x} - \hat{y}\|_2 < \delta = \min\{\delta_0, \delta_1\}$, por un lado del Lema A.2.4, para $s = 1$ y $r = 2$, se cumple que

$$\|\hat{x} - \hat{y}\|_1 < n^{\frac{1}{2}} \|\hat{x} - \hat{y}\|_2. \quad (\text{A.27})$$

Por otro lado como $\hat{y} \in \mathbb{R} \setminus Q$ se tiene que $y_i \in A := (-\infty, -r - n^{\frac{1}{2}}\delta_0) \cup (r + n^{\frac{1}{2}}\delta_0, \infty)$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Sea $y_k \in A$ con k fija, esto da lugar a dos sub casos.

CASO 3.1: $y_k < -r - n^{\frac{1}{2}}\delta_0$.

En este caso, por la definición de δ y por la desigualdad en (A.27), se cumple que

$$|x_k - y_k| \leq \|\hat{x} - \hat{y}\|_1 \leq n^{\frac{1}{2}} \|\hat{x} - \hat{y}\|_2 < n^{\frac{1}{2}}\delta_0, \quad (\text{A.28})$$

esto implica que $x_k < y_k + n^{\frac{1}{2}}\delta_0$. De esto último y de la hipótesis $y_k < -r - n^{\frac{1}{2}}\delta_0$ (correspondiente a este sub caso), se tiene que $x_k < y_k + n^{\frac{1}{2}}\delta_0 < -r$, así $x_k < -r$. Por la hipótesis del Caso 3 se tiene que $\hat{x} \in Q$, así, necesariamente debe ocurrir que $-r - n^{\frac{1}{2}}\delta_0 < x_k < -r$, es decir $x_k \in (-r - n^{\frac{1}{2}}\delta_0, -r)$.

CASO 3.2: $y_k > r + n^{\frac{1}{2}}\delta_0$.

En este caso, nuevamente por la definición de δ y la desigualdad en (A.27), se cumple la desigualdad en (A.28), lo que implica que $y_k - n^{\frac{1}{2}}\delta_0 < x_k$. De esto último y de la hipótesis del sub caso $y_k > r + n^{\frac{1}{2}}\delta_0$, se tiene que $r < y_k - n^{\frac{1}{2}}\delta_0 < x_k$, así $x_k > r$. Otra vez, la hipótesis del Caso 3 pide que $\hat{x} \in Q$, entonces necesariamente debe ocurrir que $r + n^{\frac{1}{2}}\delta_0 > x_k > r$, es decir $x_k \in (r, r + n^{\frac{1}{2}}\delta_0)$.

De esta forma se ha probado que si $y_k \in A$, entonces $x_k \in (-r - n^{\frac{1}{2}}\delta_0, -r) \cup (r, r + n^{\frac{1}{2}}\delta_0)$, y como y_k fue arbitrario, esto ocurre para cualquier $k \in \{1, \dots, n\}$. La consecuencia de esto último es que $\hat{x} \notin [-r, r]^n$, por lo tanto $\hat{x} \notin \text{sop}(f)$, pues por construcción $\text{sop}(f) \subset [-r, r]^n$, así, en este caso ocurre que $\hat{x} \notin \text{sop}(f)$ y $\hat{y} \notin \text{sop}(f)$, por lo que ocurren las condiciones del Caso 2, que determinan $|f(\hat{x}) - f(\hat{y})| = 0 < \varepsilon$.

CASO 4: $\hat{x} \in Q$ y $\hat{y} \in \mathbb{R} \setminus Q$.

Este caso es totalmente análogo al Caso 3.

En los 4 casos posibles, para $\hat{x}, \hat{y} \in \mathbb{R}^n$ y $\varepsilon > 0$ se encontró que $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1\}$ cumple que $\|\hat{x} - \hat{y}\|_2 < \delta \Rightarrow |f(\hat{x}) - f(\hat{y})| < \varepsilon$, lo que prueba que f es UC en $\mathbb{R}^n$, que es lo que se buscaba. $\square$

Lema A.2.6. [Teorema del sándwich] Si (x_k) , (y_k) y (z_k) son sucesiones en el espacio métrico $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, tales que $x_k \leq y_k \leq z_k$, con $x_k \rightarrow l$ y $z_k \rightarrow l$ para algún $l \in \mathbb{R}$, entonces $y_k \rightarrow l$. $\lrcorner$

Prueba. Sean (x_k) , (y_k) y (z_k) sucesiones en $\mathbb{R}$ que cumplen las hipótesis. Sea $\varepsilon > 0$. Como $x_k \rightarrow l$ y $z_k \rightarrow l$, existen $k_x \in \mathbb{N}$ y $k_y \in \mathbb{N}$ tales que $|x_k - l| < \varepsilon$ y $|y_k - l| < \varepsilon$, para

todo $k \geq \max\{k_x, k_y\}$. Entonces, si $k \geq \max\{k_x, k_y\}$, ocurre que $|x_k - l| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon + l < x_k$ y $|y_k - l| < \varepsilon \Rightarrow y_k < \varepsilon + l$, y de la hipótesis $x_k \leq y_k \leq z_k$ se sigue que $-\varepsilon + l < x_k \leq y_k \leq y_k < \varepsilon + l \iff |x_k - l| < \varepsilon$. Por lo tanto se ha encontrado $N = \max\{k_x, k_y\}$ tal que $|x_k - l| < \varepsilon$ para todo $k \geq N$, es decir $y_k \rightarrow l$, lo que concluye la prueba. $\square$

Lema A.2.7. [Caracterización de continuidad uniforme con sucesiones] Una función $f : X \rightarrow Y$ con (X, d_X) y (Y, d_Y) espacios métricos, es UC en X si y solo si para cualquier par de sucesiones $(\hat{x}_k), (\hat{y}_k)$ en X tales que $d_X(\hat{x}_k, \hat{y}_k) \rightarrow 0$ se tiene que $d_Y(f(\hat{x}_k), f(\hat{y}_k)) \rightarrow 0$. $\lrcorner$

Prueba. $\Rightarrow$) Sea $\varepsilon > 0$. Supóngase que f es UC, y que (x_k) y (y_k) son sucesiones en X que cumplen $d_X(x_k, y_k) \rightarrow 0$. Por un lado, de la continuidad uniforme de f , para el valor $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cualquier $x_k, y_k \in X$, $d_X(x_k, y_k) < \delta$ implica $d_Y(f(x_k), f(y_k)) < \varepsilon$. Por otro lado, dado que $d_X(x_k, y_k) \rightarrow 0$, se tiene que para el valor $\delta > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d_X(x_k, y_k) < \delta$ para todo $k \geq k_0$. Así, para el valor $\varepsilon > 0$, se ha encontrado $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d_X(x_k, y_k) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x_k), f(y_k)) < \varepsilon$ para todo $k \geq k_0$ lo que prueba que $d_Y(f(x_k), f(y_k)) \rightarrow 0$, que es lo que se buscaba.

$\Leftarrow$) Por contra positiva, supóngase que f no es UC, entonces existe una $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ existen $x, y \in X$ con $d_X(x, y) < \delta$ pero $d_Y(f(x), f(y)) \geq \varepsilon$. Entonces, para cada $\delta_k = \frac{1}{k}$ con $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, existen $x_k, y_k \in X$ tales que $d_X(x_k, y_k) < \delta_k$ pero $d_Y(f(x_k), f(y_k)) \geq \varepsilon$, por lo tanto

$$0 \leq d_X(x_k, y_k) < \delta_k = \frac{1}{k} \Rightarrow 0 = \lim_{k \rightarrow \infty} 0 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} d_X(x_k, y_k) < \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} = 0,$$

así, por el Lema A.2.6, ocurre que $\lim_{k \rightarrow \infty} d_X(x_k, y_k) = 0$, pero también por construcción se tiene que $\lim_{k \rightarrow \infty} d_Y(f(x_k), f(y_k)) \geq \varepsilon$, por lo tanto se han encontrado dos sucesiones (x_k) y (y_k) en X tales que $d_X(x_k, y_k) \rightarrow 0$ pero $d_Y(f(x_k), f(y_k)) \not\rightarrow 0$. $\square$

Lema A.2.8. Las funciones $\pi_x, D, \mathbb{T}_{\hat{c}}f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $\pi_x(x, y) := x$, $D(x, y) := x - y$ y $\mathbb{T}_{\hat{c}}f(x) := f(\hat{x} - \hat{c})$ (con $\hat{c} = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ y $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ UC en $\mathbb{R}^2$) son uniformemente continuas en $\mathbb{R}^2$. $\lrcorner$

Prueba. Sean $(\hat{x}_k)$ y $(\hat{y}_k)$ sucesiones en $\mathbb{R}^2$ tales que $\|\hat{x}_k - \hat{y}_k\|_2 \rightarrow 0$, con $\hat{x}_k = (x_{1k}, x_{2k})$ y $\hat{y}_k = (y_{1k}, y_{2k})$.

Por el Lema A.2.7, basta probar que

1. $|\pi_x(\hat{x}_k) - \pi_x(\hat{y}_k)| \rightarrow 0$,
2. $|D(\hat{x}_k) - D(\hat{y}_k)| \rightarrow 0$, y
3. $|\mathbb{T}_{\hat{c}}f(\hat{x}_k) - \mathbb{T}_{\hat{c}}f(\hat{y}_k)| \rightarrow 0$ con $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ UC.

1. Por el Lema A.2.4 se tiene

$$0 \leq |x_{1k} - y_{1k}| + |x_{2k} - y_{2k}| = \|\hat{x}_k - \hat{y}_k\|_1 \leq 2^{\frac{1}{2}} \|\hat{x}_k - \hat{y}_k\|_2 \rightarrow 0.$$

Por el Lema A.2.6 se tiene que

$$(|x_{1k} - y_{1k}| + |x_{2k} - y_{2k}|) \rightarrow 0. \quad (\text{A.29})$$

Como esta última sucesión es una suma de términos positivos, se tiene que $|x_{1k} - y_{1k}| \rightarrow 0$ y $|x_{2k} - y_{2k}| \rightarrow 0$. Luego $|\pi_x(\hat{x}_k) - \pi_x(\hat{y}_k)| \rightarrow 0 \iff |x_{1k} - y_{1k}| \rightarrow 0$. Dado que esto último se cumple, se tiene que π_x es UC en $\mathbb{R}^2$.

2. Ocurre que $|D(\hat{x}_k) - D(\hat{y}_k)| \rightarrow 0 \iff |x_{1k} - x_{2k} - (y_{1k} - y_{2k})| \rightarrow 0 \iff |(x_{1k} - y_{1k}) + (y_{2k} - x_{2k})| \rightarrow 0$, dado que esto último se cumple (por la expresión en (A.29)), se tiene que D también es UC en $\mathbb{R}^2$.

3. Finalmente se tiene que

$$\begin{aligned} \|(\hat{x}_k - \hat{c}) - (\hat{y}_k - \hat{c})\|_2 &= \|(x_{1k} - c_1, x_{2k} - c_2) - (y_{1k} - c_1, y_{2k} - c_2)\|_2 \\ &= \|(x_{1k} - c_1 - (y_{1k} - c_1), x_{2k} - c_2 - (y_{2k} - c_2))\|_2 \\ &= \|(x_{1k} - y_{1k}, x_{2k} - y_{2k})\|_2 = \|\hat{x}_k - \hat{y}_k\|_2 \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Es decir, $\|(\hat{x}_k - \hat{c}) - (\hat{y}_k - \hat{c})\|_2 \rightarrow 0$, como f es UC, por el Lema A.2.7, lo anterior implica que $|f(\hat{x}_k - \hat{c}) - f(\hat{y}_k - \hat{c})| \rightarrow 0$. Lo que prueba que $|\mathbb{T}_{\hat{c}}f(\hat{x}_k) - \mathbb{T}_{\hat{c}}f(\hat{y}_k)| \rightarrow 0$, y así $\mathbb{T}_{\hat{c}}f$ es UC en $\mathbb{R}^2$, lo que concluye la prueba. $\square$

Lema A.2.9. Sean (X, d_X) , (Y, d_Y) y (Z, d_Z) espacios métricos. Si $f : X \rightarrow Y$ es UC en X y $g : Y \rightarrow Z$ es UC en Y , entonces $g \circ f : X \rightarrow Z$ es UC en X . $\lrcorner$

Prueba. Sean (x_k) y (y_k) sucesiones en X tales que $d_X(x_k, y_k) \rightarrow 0$, por el Lema A.2.7 basta probar que $d_Z((g \circ f)(x_k), (g \circ f)(y_k)) \rightarrow 0$. Como f es UC y $d_X(x_k, y_k) \rightarrow 0$, por el Lema A.2.7 se tiene que $d_Y(f(x_k), f(y_k)) \rightarrow 0$. De la misma forma, como g es UC y $d_Y(f(x_k), f(y_k)) \rightarrow 0$, por el Lema A.2.7 se tiene que $d_Z(g(f(x_k)), g(f(y_k))) \rightarrow 0$, es decir $d_Z((g \circ f)(x_k), (g \circ f)(y_k)) \rightarrow 0$, lo que prueba la proposición. $\square$

Lema A.2.10. Sean $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ UCs en $\mathbb{R}^2$ y acotadas (es decir existen $M_1, M_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ tales que $|f(\hat{x})| \leq M_1$ y $|g(\hat{x})| \leq M_2$ para todo $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$), entonces fg es UC en $\mathbb{R}^2$. $\lrcorner$

Prueba. Sean $(\hat{x}_k)$ y $(\hat{y}_k)$ sucesiones en $\mathbb{R}^n$ tales que $\hat{x}_k - \hat{y}_k \rightarrow 0$, por el Lema A.2.7 basta probar que $|f(\hat{x}_k)g(\hat{x}_k) - f(\hat{y}_k)g(\hat{y}_k)| \rightarrow 0$. Entonces

$$\begin{aligned} 0 \leq |f(\hat{x}_k)g(\hat{x}_k) - f(\hat{y}_k)g(\hat{y}_k)| &= |f(\hat{x}_k)g(\hat{x}_k) - f(\hat{y}_k)g(\hat{y}_k) - f(\hat{x}_k)g(\hat{y}_k) + f(\hat{x}_k)g(\hat{y}_k)| \\ &= |f(\hat{x}_k)(g(\hat{x}_k) - g(\hat{y}_k)) + g(\hat{y}_k)(f(\hat{x}_k) - f(\hat{y}_k))| \\ &\leq |f(\hat{x}_k)||g(\hat{x}_k) - g(\hat{y}_k)| + |g(\hat{y}_k)||f(\hat{x}_k) - f(\hat{y}_k)| \\ &\leq M_1|g(\hat{x}_k) - g(\hat{y}_k)| + M_2|f(\hat{x}_k) - f(\hat{y}_k)|, \end{aligned}$$

como por hipótesis f y g son UC, se tiene que $|g(\hat{x}_k) - g(\hat{y}_k)| \rightarrow 0$ y $|f(\hat{x}_k) - f(\hat{y}_k)| \rightarrow 0$, por lo tanto $M_1|g(\hat{x}_k) - g(\hat{y}_k)| + M_2|f(\hat{x}_k) - f(\hat{y}_k)| \rightarrow 0$, de este modo

$$0 = \lim_{k \rightarrow \infty} |f(\hat{x}_k)g(\hat{x}_k) - f(\hat{y}_k)g(\hat{y}_k)| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} M_1|g(\hat{x}_k) - g(\hat{y}_k)| + M_2|f(\hat{x}_k) - f(\hat{y}_k)| = 0,$$

y así $|f(\hat{x}_k)g(\hat{x}_k) - f(\hat{y}_k)g(\hat{y}_k)| \rightarrow 0$, lo que prueba la proposición. $\square$

Lema A.2.11. Sean (x_k) una sucesión en $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ tal que $x_k \rightarrow x$ para algún $x \in \mathbb{R}$, entonces $|x_k| \rightarrow |x|$. $\lrcorner$

Prueba. Sea $\varepsilon > 0$. Como $x_k \rightarrow x$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_k - x| < \varepsilon$ para todo $k \geq k_0$. Por otra parte se asegura que $||a| - |b|| \leq |a - b|$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$ (desigualdad triangular inversa), pues

$$|a| = |b + a - b| \leq |b| + |a - b| \text{ y } |b| = |a + b - a| \leq |a| + |b - a| = |a| + |a - b|$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow |a| \leq |b| + |a - b| \text{ y } |b| \leq |a| + |a - b| \\
&\Rightarrow |a| - |b| \leq |a - b| \text{ y } |b| - |a| \leq |a - b| \\
&\Rightarrow ||a| - |b|| \leq |a - b|.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, se cumple que $||x_k| - |x|| \leq |x_k - x| < \varepsilon$, para k con $k \geq k_0$, esto implica que $||x_k| - |x|| < \varepsilon$, para todo $k \geq k_0$, lo que prueba que $|x_k| \rightarrow |x|$. $\square$

Proposición A.2.12. [p. 108] *La función ACD está bien definida y es uniformemente continua (por lo que su gráfica es una superficie en $\mathbb{R}^3$).* $\lrcorner$

Prueba. Sea $f \in C_c^0(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ y $w \in L^1(\mathbb{R})$ tal que $w(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Por un lado $f(t_k - T)f(t_k - \tau_k - T)w(T) \in L^1(\mathbb{R})$ para $t_k, \tau_k \in \mathbb{R}$ fijos, por lo tanto

$$\phi_f(t_k, \tau_k) = \int_{\mathbb{R}_{>0}} f(t_k - T)f(t_k - \tau_k - T)w(T) dT \leq \int_{\mathbb{R}} |f(t_k - T)f(t_k - \tau_k - T)w(T)| dT < \infty, \quad (\text{A.30})$$

como $t_k, \tau_k \in \mathbb{R}$ fueron arbitrarios, se tiene ϕ_f está bien definida.

Por otra parte, sean $((x_{1k}, x_{2k}))$ y $((y_{1k}, y_{2k}))$ sucesiones en $\mathbb{R}^2$ y supóngase que $\|(x_{1k}, x_{2k}) - (y_{1k}, y_{2k})\|_2 \rightarrow 0$, por el Lema A.2.7, basta mostrar que $|\phi_f(x_{1k}, x_{2k}) - \phi_f(y_{1k}, y_{2k})| \rightarrow 0$ para poder asegurar que ϕ_f es UC en $\mathbb{R}^2$, es decir se debe mostrar que

$$\left| \int_{\mathbb{R}_{>0}} (f(x_{1k} - T)f(x_{1k} - x_{2k} - T) - f(y_{1k} - T)f(y_{1k} - y_{2k} - T))w(T) dT \right| \rightarrow 0. \quad (\text{A.31})$$

Para verifíca que A.31 se cumple, para $T \in \mathbb{R}$ fijo, considérense las funciones

$$\begin{array}{ccc}
F_T : \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\
(t, \tau) & \mapsto & f(t - T)
\end{array}
\quad \text{y} \quad
\begin{array}{ccc}
G_T : \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\
(t, \tau) & \mapsto & f(t - \tau - T).
\end{array}$$

Por el Lema A.2.8, la función $\mathbb{T}_{\hat{T}\pi_x}(t, \tau) = t - T$ (con $\hat{T} = (T, 0)$) es UC en $\mathbb{R}^2$. Por el Lema A.2.9, $(f \circ \mathbb{T}_{\hat{T}\pi_x})(t, \tau) = f(t - T) = F_T$ es UC en $\mathbb{R}^2$. De la misma forma, por el Lema A.2.8, la función $\mathbb{T}_{\hat{T}D}(t, \tau) = t - \tau - T$ es UC en $\mathbb{R}^2$ y por el Lema A.2.9, $(f \circ \mathbb{T}_{\hat{T}D})(t, \tau) = f(t - \tau - T) = G_T$ es UC en $\mathbb{R}^2$. Tanto F_T y G_T son acotadas, pues $f \in C_c^0(\mathbb{R})$ implica que f está acotada en el compacto $\overline{\text{sup}(f)}$ (ver [55, Cor. 4.11]), es decir, existe $M \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in \overline{\text{sup}(f)}$, por lo tanto está acotada en todo su dominio. De esta forma

$$|F_T(t, \tau)| = |f(t - T)| \leq M \text{ y } |G_T(t, \tau)| = |f(t - \tau - T)| \leq M \text{ para cualquier } (t, \tau) \in \mathbb{R}^2, \quad (\text{A.32})$$

entonces, por el Lema A.2.10, se puede asegurar que la función $F_T G_T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $F_T G_T(t, \tau) = f(t - T)f(t - \tau - T)$ es UC en $\mathbb{R}^2$ y por el Lema A.2.7, esto implica que $|F_T G_T(x_{1k}, x_{2k}) - F_T G_T(y_{1k}, y_{2k})| \rightarrow 0$, es decir

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{1k} - T)f(x_{1k} - x_{2k} - T) - f(y_{1k} - T)f(y_{1k} - y_{2k} - T) = 0.$$

Como $w(T) \in L^1(\mathbb{R})$ no depende de k , se tiene que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (f(x_{1k} - T)f(x_{1k} - x_{2k} - T) - f(y_{1k} - T)f(y_{1k} - y_{2k} - T))w(T) = 0. \quad (\text{A.33})$$

Ahora considérese la sucesión de funciones (H_k) con $H_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y donde

$$H_k(T) = (f(x_{1k} - T)f(x_{1k} - x_{2k} - T) - f(y_{1k} - T)f(y_{1k} - y_{2k} - T))w(T).$$

Se tiene que $H_k \in L^1(\mathbb{R})_{\blacktriangle_1}$, pues

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} H_k(T) dT &= \int_{\mathbb{R}} (f(x_{1k} - T)f(x_{1k} - x_{2k} - T) - f(y_{1k} - T)f(y_{1k} - y_{2k} - T))w(T) dT \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x_{1k} - T)f(x_{1k} - x_{2k} - T)w(T) dT - \int_{\mathbb{R}} f(y_{1k} - T)f(y_{1k} - y_{2k} - T)w(T) dT \leq \infty, \end{aligned}$$

por A.30

También, por A.33, ocurre que $H_k(T) \rightarrow 0$ para todo $T \in \mathbb{R}_{\blacktriangle_2}$. Luego, se define la función $g(T) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(T) = 2M^2w(T)$, por un lado $g(T) \in L^1(\mathbb{R})$ pues $w(T) \in L^1(\mathbb{R})$, y por otro lado se cumple que $|H_k(T)| < g(T)$ para todo $T \in \mathbb{R}_{\blacktriangle_3}$, pues

$$\begin{aligned} |H_k(T)| &= |(f(x_{1k} - T)f(x_{1k} - x_{2k} - T) - f(y_{1k} - T)f(y_{1k} - y_{2k} - T))w(T)| \\ &\leq (|f(x_{1k} - T)f(x_{1k} - x_{2k} - T)| + |f(y_{1k} - T)f(y_{1k} - y_{2k} - T)|)|w(T)| \\ &= |f(x_{1k} - T)f(x_{1k} - x_{2k} - T)||w(T)| + |f(y_{1k} - T)f(y_{1k} - y_{2k} - T)||w(T)| \\ &\leq M^2|w(T)| + M^2|w(T)| = 2M^2w(T). \end{aligned}$$

por (A.32)

Lo mencionado en $\blacktriangle_1$, $\blacktriangle_2$ y $\blacktriangle_3$ cumplen las hipótesis del Teorema de convergencia dominada (TCD - Teorema 2.3.22), por lo tanto se puede asegurar que

$$0 = \left| \int_{\mathbb{R}} 0 dT \right| \underbrace{=}_{\text{TCD}} \left| \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} H_k(T) dT \right| \underbrace{=}_{\text{Lema A.2.11}} \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \int_{\mathbb{R}} H_k(T) dT \right|,$$

así, $\left| \int_{\mathbb{R}_{>0}} H_k(T) dT \right| \rightarrow 0$, que es lo mismo que

$$\left| \int_{\mathbb{R}_{>0}} (f(x_{1k} - T)f(x_{1k} - x_{2k} - T) - f(y_{1k} - T)f(y_{1k} - y_{2k} - T))w(T) dT \right| \rightarrow 0.$$

Esto último es lo que se quería demostrar en A.31. Por lo tanto la función de ACD de Licklider dada por

$$\begin{aligned} \phi_f : \quad \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (t, \tau) &\mapsto \phi_g(t, \tau) := \int_{\mathbb{R}_{>0}} f(t - T)f(t - \tau - T)w(T) dT, \end{aligned}$$

es uniformemente continua y por tanto $\{(x, y, \phi_f(x, y)) : (x, y) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^2\}$ es una superficie en $\mathbb{R}^3$, y con esto concluye la prueba. $\square$

Proposición A.2.13. [p. 123] Para cada $\hat{a} \in \mathbb{R}^3$, el conjunto de puntos $\hat{x} \in \mathbb{R}^3$ que cumplen la propiedad de $d(\hat{x}, \hat{x}_l) = d(\hat{a}, \hat{x}_l)$ y $d(\hat{x}, \hat{x}_r) = d(\hat{a}, \hat{x}_r)$ es el círculo en el plano $x = a$ con centro en $(a, 0, 0)$ y radio $\sqrt{b^2 + c^2}$, es decir, se asegura que

$$\{\hat{x} \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 + z^2 = b^2 + c^2, x = a\} = \{\hat{x} \in \mathbb{R}^3 \mid d(\hat{x}, \hat{x}_l) = d(\hat{a}, \hat{x}_l) \text{ y } d(\hat{x}, \hat{x}_r) = d(\hat{a}, \hat{x}_r)\}. \quad (\text{A.34})$$

」

Prueba. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ fija y considérese la transformación R_x^α definida como:

$$\begin{aligned} R_x^\alpha : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \hat{x} &\mapsto R_x^\alpha(\hat{x}) := (x, y \cos \alpha - z \sin \alpha, y \sin \alpha + z \cos \alpha) \quad (\text{con } \hat{x} = (x, y, z)). \end{aligned}$$

Esta transformación toma un punto (x_0, y_0, z_0) y aplica la matriz de rotación $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ al punto (y_0, z_0) del plano $x = x_0$, tal punto se rota α grados en contra de las manecillas del reloj (viendo el sistema de coordenadas y, z de forma derecha). Se asegura que R_x^α es una isometría, es decir $d(R_x^\alpha(\hat{x}_0), R_x^\alpha(\hat{x}_1)) = d(\hat{x}_0, \hat{x}_1)$ para cualquier $\hat{x}_0, \hat{x}_1 \in \mathbb{R}^3$ con $\hat{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y $\hat{x}_1 = (x_1, y_1, z_1)$. En efecto:

$$\begin{aligned} &d(R_x^\alpha(\hat{x}_0), R_x^\alpha(\hat{x}_1)) \\ &= d((x_0, y_0 \cos \alpha - z_0 \sin \alpha, y_0 \sin \alpha + z_0 \cos \alpha), (x_1, y_1 \cos \alpha - z_1 \sin \alpha, y_1 \sin \alpha + z_1 \cos \alpha)) \\ &= ((x_0 - x_1)^2 + (y_0 \cos \alpha - z_0 \sin \alpha - (y_1 \cos \alpha - z_1 \sin \alpha))^2 \\ &\quad + (y_0 \sin \alpha + z_0 \cos \alpha - (y_1 \sin \alpha + z_1 \cos \alpha))^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= ((x_0 - x_1)^2 + (\cos \alpha(y_0 - y_1) + \sin \alpha(z_1 - z_0))^2 + (\sin \alpha(y_0 - y_1) + \cos \alpha(z_0 - z_1))^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= ((x_0 - x_1)^2 + \cos^2 \alpha(y_0 - y_1)^2 + 2 \cos \alpha(y_0 - y_1) \sin \alpha(z_1 - z_0) + \sin^2 \alpha(z_1 - z_0)^2 \\ &\quad + \sin^2 \alpha(y_0 - y_1)^2 + 2 \sin \alpha(y_0 - y_1) \cos \alpha(z_0 - z_1) + \cos^2 \alpha(z_0 - z_1)^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= ((x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + 2 \cos \alpha(y_0 - y_1) \sin \alpha(z_1 - z_0) \\ &\quad + (z_1 - z_0)^2(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + 2 \sin \alpha(y_0 - y_1) \cos \alpha(z_0 - z_1))^{\frac{1}{2}} \\ &= ((x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 + 2 \cos \alpha(y_0 - y_1) \sin \alpha(z_1 - z_0) + (z_1 - z_0)^2 \\ &\quad + 2 \sin \alpha(y_0 - y_1) \cos \alpha(z_0 - z_1))^{\frac{1}{2}} \\ &= ((x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 + 2 \cos \alpha \sin \alpha(y_0 - y_1)(z_1 - z_0 + z_0 - z_1) + (z_1 - z_0)^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= ((x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 + 2 \cos \alpha \sin \alpha(y_0 - y_1)(0) + (z_1 - z_0)^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= ((x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 + (z_0 - z_1)^2)^{\frac{1}{2}} = d(\hat{x}_0, \hat{x}_1) \end{aligned}$$

Por lo tanto R_x^α es una isometría y como α fue arbitraria esto ocurre para cualquier valor de α . En particular se tiene que $d(R_x^\alpha(\hat{a}), R_x^\alpha(\hat{x}_l)) = d(\hat{a}, \hat{l})$, pero $R_x^\alpha(\hat{x}_l) = \hat{x}_l$ pues $\hat{x}_l$ está en el eje de rotación (x) , lo mismo ocurre con $\hat{x}_r$, por lo tanto

$$d(R_x^\alpha(\hat{a}), \hat{x}_l) = d(\hat{a}, \hat{l}) \text{ y } d(R_x^\alpha(\hat{a}), \hat{x}_r) = d(\hat{a}, \hat{r}) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R},$$

y como $R_x^\alpha(\hat{a})$ es rotar el punto (b, c) en el plano $x = a$, para cada valor de α se tiene un punto en el círculo $\{\hat{x} \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 = b^2 + c^2, x = a\}$, así se cumple la igualdad en (A.34). $\square$

Apéndice B

Primeras teorías de audición: Helmholtz y Rutherford



E acuerdo con Lyon [23, Cap. 2], las teorías de audición más influyentes, propuestas desde la segunda mitad del siglo XIX hasta principios del siglo XIX, se pueden clasificar en dos familias. La primera familia se denomina teorías de lugar (*place theories*) representada por Hermann von Helmholtz, y la segunda se llama “teorías temporales” o “teorías de frecuencia” representada por William Rutherford. En este apéndice, con ayuda del trabajo de Lyon [23] y de Cheveigné [54, Cap. 6], se discuten estas dos posturas, para después contrastarlas con lo mencionado en el Capítulo 4 de esta tesis.

Las “teorías de audición” y las teorías de percepción de altura

Lyon enfatiza que existe una confusión de lo que se entiende por “teorías de audición”, ya que en muchos casos, esta última solo hace referencia a explicar la manera en que el oído infiere la altura (*pitch*) de un sonido. En §4.4.2 se discutió brevemente la problemática que encierra esta cuestión. Lyon cita a Békésy señalando explícitamente este hecho, vale la pena reproducir la cita.

Las palabras “teorías de audición”, tal como se usan comúnmente, son engañosas. Sabemos poco sobre el funcionamiento del nervio auditivo, y aún menos sobre la corteza auditiva, y la mayoría de las teorías de la audición no hacen ninguna afirmación sobre su funcionamiento. Las teorías de audición normalmente se ocupan únicamente de responder a la pregunta: ¿cómo es que el oído discrimina la altura? Debemos saber cómo se distribuyen las vibraciones producidas por un sonido a lo largo de la membrana basilar antes de poder entender cómo se discrimina la altura y, por lo tanto, las teorías de audición son básicamente teorías relativas al patrón vibratorio de la membrana basilar y los órganos de los sentidos ligados a ella [143, p. 779].

En esta cita que data de 1956, Békésy señala la importancia de comprender el movimiento de la membrana basilar para proseguir a investigar tareas auditivas más complejas. Años más tarde (1961), este investigador recibe el premio nobel de fisiología por descubrir que la MB responde mediante ondas transversales, cuya posición de la onda depende de la frecuencia del estímulo sonoro, lo cual fue un importante avance en la comprensión del sentido del oído. Como se mostró en el Capítulo 4, al día de hoy se conocen más detalles

sobre el funcionamiento de diversos órganos involucrados en el proceso de audición, sin embargo, poco más de 60 años después del descubrimiento de Bèkèsy, aún no está clara la respuesta concreta de la MB ante un sonido complejo.

Como Bèkèsy señala, las “teorías de audición” no teorizan nada respecto a lo que ocurre en la corteza cerebral, la “extracción de significado a partir del sonido” (como Lyon titula su obra), u otras tareas. En cierto modo, teorizar sobre los mecanismos de procesamiento sonoro en el cerebro se traduce en teorizar sobre procesos humanos mucho más oscuros e intrincados, como el pensamiento, el habla, la comunicación y el lenguaje. Rutherford enfatiza como el sonido se volvió crucial para estos aspectos de la consciencia:

Muy abajo en la escala de la vida, en épocas pasadas, se desarrolló el primer rudimento de un oído; a través de su acción, las vibraciones del sonido podían influir en el sistema nervioso y producir allí sensaciones sonoras. A medida que pasó el tiempo, el órgano se desarrolló más y, sin duda, se refinó más en su poder de recibir y transmitir impresiones sonoras. Al principio no existía ningún órgano mediante el cual el animal pudiera producir sonido como modo de expresión. Pero cuando se desarrolló un órgano para la producción de sonido, y cuando un animal llegó a ser capaz de utilizar ese órgano en respuesta adecuada a sus diversas sensaciones de sonido, la fase más elevada de la acción cerebral se hizo posible. Sólo se necesitaba el desarrollo superior de las operaciones intelectuales del cerebro para que la percepción de las diferentes sensaciones sonoras fuera lo suficientemente refinada como para hacer posible la invención del lenguaje, con sus múltiples significados y maravillosos resultados. Y finalmente ha ocurrido: las impresiones sonoras están tan estrechamente asociadas con nuestras operaciones mentales, que *pensamos* con palabras no dichas [144, p. 5].

Dicho todo lo anterior, tanto la teoría de Helmholtz como la de Rutherford, que se mencionarán a continuación, se preocuparon únicamente por explicar lo que ocurre con un sonido al entrar en la cóclea.

Helmholtz

En 1862 Hermann von Helmholtz publica su obra “Sobre las Sensaciones del Tono como fundamento Fisiológico para la Teoría Musical” [79], donde postula que la cóclea en el oído interno tiene miles de diminutos resonadores donde cada uno entra en resonancia con un tono puro específico. Helmholtz defendió su tesis apoyándose en el teorema de Fourier (ecuación (2.55)):

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \cos(2\pi\phi kt + \theta_k) \quad \forall f \in \mathbb{R}L_p^2(0, T),$$

y en los resonadores que llevan su nombre.

En §3.1.2 se explicó como el resonador de Helmholtz “responde mejor” ante un tono puro que tiene misma frecuencia que la frecuencia de resonancia del resonador en cuestión. Helmholtz utilizó el resonador para analizar los tonos puros que componen los sonidos característicos (timbres) de algunos instrumentos musicales y sonidos en general. La



Figura B.1: Resonador de Helmholtz [79, Fig. 16 a].

abertura más angosta b se inserta en el conducto externo auditivo (Helmholtz menciona cubrir de cera la abertura para evitar lesiones), mientras que la abertura a se acerca a la fuente de sonido que desea ser analizada. Las ondas sonoras de la fuente hacen que el resonador vibre, y debido al fenómeno de resonancia, el resonador filtra las frecuencias del sonido a analizar y resalta la frecuencia de resonancia (en este caso el resonador actúa como un filtro paso-banda o *bandpass*). El resonador filtra la gama de frecuencias del sonido complejo resultando la audición (mayoritariamente) del tono puro en b correspondiente a la frecuencia de resonancia ϕ del resonador. Si al analizar el sonido, se percibe una intensidad alta, entonces la amplitud de la frecuencia de resonancia ϕ tiene un valor alto en la descomposición de Fourier del sonido analizado, si en cambio, al analizar el sonido el resonador no se escucha o se escucha muy débil, entonces la amplitud de ϕ tiene un valor bajo o inexistente en la descomposición de Fourier del sonido analizado. Así, juzgando la magnitud del sonido escuchado en b , se podía identificar qué tan presente se encontraba un tono puro en la descomposición de la fuente de sonido analizada. Helmholtz argumentó que todo sonido, al entrar en la cóclea, era descompuesto en tonos puros y tal tarea se llevaba a cabo por las células ciliadas, que actuaban como resonadores, las cuales registrarían la frecuencia (tono puro) y amplitud de cada una de las componentes de la descomposición de Fourier de un sonido percibido para posteriormente enviar al sistema nervioso central auditivo el espectro que contiene cada frecuencia.

En esta teoría, implícitamente se está asumiendo que la detección de un determinado tono puro se da en un lugar fijo y determinado de la cóclea, por esta razón a la teoría se denomina “de lugar”. En resumen, esta teoría asegura que “un tono puro corresponde a un lugar de máxima respuesta de resonancia, y todos los otros aspectos de la cualidad del tono y sonidos más complejos son capturados en el *espectro*” [23, p. 24].

Rutherford

En contraste a la teoría de Helmholtz, en 1887 William Rutherford propuso una teoría de audición a la cuál la llamó “teoría del teléfono” por ser una analogía al funcionamiento del teléfono. Para Rutherford no hay resonadores en el sistema auditivo interno, y la cóclea no descompone una onda sonora en tonos puros, en el sistema auditivo externo y medio no ocurre un análisis o clasificación de frecuencias fundamentales. La onda sonora que llega al oído estimula de la misma forma a todas las terminaciones nerviosas del oído y esta estimulación produce una señal similar a la onda sonora en cuestión, de modo que el sistema nervioso central auditivo recibe una señal similar (análoga) a la forma de onda sonora original y no una descomposición de esta. En palabras de Rutherford:

La teoría es que la cóclea no actúa en el principio de vibración simpática, sino que los cilios de todas sus células auditivas vibran ante cada tono, al igual que el tímpano o el oído; que no hay un análisis de vibraciones complejas en la cóclea o en ningún otro lugar en el mecanismo periférico del oído; que las células ciliadas transforman vibraciones sonoras en vibraciones nerviosas similares en frecuencia y amplitud a las vibraciones sonoras; que las vibraciones simples y complejas de las moléculas-nerviosas llegan a las células sensoriales del cerebro y allí producen, por supuesto, no el sonido, sino la sensación del sonido, cuya naturaleza no depende del estímulo de diferentes células sensoriales, sino de la frecuencia, amplitud y forma de las vibraciones que llegan a las células, probablemente a través de todas las fibras del nervio auditivo. Según tal teoría, la causa física de la armonía y la disonancia se lleva al cerebro, y los

principios matemáticos de la acústica encuentran una entrada en la oscura región de la conciencia [144, p. 5].

En la Tabla B.1 se pueden ver como ambas teorías tienen postulados (en principio) incompatibles, pues la teoría de Rutherford niega que en la cóclea ocurra una descomposición de un sonido en frecuencias simples.

Corriente	Características
Teorías de lugar (Herman von Helmholtz)	■ El oído interno (cóclea) descompone un sonido en sus componentes de Fourier. ■ En la cóclea hay una organización o disposición de células receptoras (resonadores) que responden a una determinada frecuencia. ■ El sistema nervioso central auditivo es capaz de analizar e interpretar el espectro de frecuencias para hacer inteligible un sonido. ■ La noción de consonancia y disonancia se debe a que una onda acústica afecta ciertas células resonantes.
Teorías temporales (William Rutherford)	■ El sonido nunca se descompone (en el sentido de Fourier) en tonos puros en ninguna etapa del proceso de audición. ■ Las ondas sonoras que entran en el sistema auditivo medio e interno estimulan el tímpano y todas las terminaciones nerviosas de manera unánime. ■ El sistema nervioso central auditivo recibe vibraciones nerviosas similares (análogas) en frecuencia y amplitud a las vibraciones sonoras acústicas originales. ■ La noción de consonancia y disonancia es percibida hasta que el cerebro procesa el sonido en el sistema nervioso central auditivo donde “los principios matemáticos de la acústica encuentran una entrada en la oscura región de la conciencia” [144, p. 5].

Tabla B.1: Tabla comparativa entre los postulados de la teoría de Helmholtz y Rutherford.

Contraste de las teorías con el presente

Respecto a la teoría de Rutherford, de Cheveigné menciona como “llama la atención el contraste entre su modesta teoría (dos páginas) y la obra monumental de Helmholtz [volumen con alrededor de 400 páginas] a la que se opuso” [54, p. 191]. Sin embargo, el mismo Rutherford reconoció la importancia de los aportes de Helmholtz: “su teoría de la sensación sonora puede ser defectuosa, pero eso nunca podrá empañar el esplendor de sus maravillosas contribuciones al progreso del conocimiento científico” [144, p. 5], después de todo y nuevamente, como se mencionó en la introducción de esta tesis, antes de llegar

a un modelo efectivo, primero interviene “la imaginación, la intuición, la experimentación, las conjeturas sensatas, el tanteo, las analogías, incluso las más vagas, los tropiezos y los titubeos” [34, p. 58].

La principal crítica que había contra la teoría de Helmholtz, era que no se tomaba en cuenta el factor de la fase, o al menos no indicaba como era posible inferirla. De acuerdo a esta teoría (en esencia), la cóclea convierte el sonido en un espectrograma, y en este último se está dejando de lado el factor de la fase, por lo que hace falta información para poder reconstruir el sonido original.

Por otra parte a Rutherford se le achacó que las neuronas tenían un límite de disparos por segundo, por lo que no era posible que una neurona disparara a frecuencias audibles muy altas, sin embargo, con ayuda del principio de torrente (*volley principle*) discutido en el §4 esto dejaría de ser un problema.

Lyon menciona como eventualmente se reconoció que ambas teorías no eran del todo incompatibles, y había formas de consolidarlas en una sola. Esto último se ve reflejado en todo lo abordado en el Capítulo 4 de esta tesis. Con base en el trabajo de Schnupp y colegas [3], efectivamente hay una descomposición de frecuencias en la cóclea, efectuada por la membrana basilar (esto es Helmholtz), pero al mismo tiempo, las células ciliadas interiores del órgano de Corti asociadas a frecuencias bajas de la membrana preservan la distancia temporal entre crestas de un tono puro a través del fenómeno de aseguramiento de fase o *phase locking* (esto es Rutherford).

En cuanto a la manera en que la cóclea infiere (o al menor prepara el terreno para) inferir la altura de un sonido arbitrario es otra pregunta que aún no se resuelve. Nuevamente, se señala el trabajo de Cheveigné [54, Cap. 6] como una excelente fuente donde se discuten a fondo los distintos modelos existentes para la percepción de altura. Una propuesta de esto último es la dada por Licklider, que se buscó explicar en §4.4.2: las neuronas realizan una operación modelada por la función ACD, además, esta última operación es utilizada por Lyon para todo su sistema de *machine hearing* y la creación de la imagen auditiva.

Bibliografía

Ir al índice general

- [1] J. F. Culling y M. A. Akeroyd, *Spatial Hearing*. Oxford University Press, 2010.
- [2] T. Hecker, “The era of Megaphonics: on the Productivity of Loud Sound, 1880-1930”, Tesis doctoral, Art History and Communication Studies, McGill University, Montreal, 2014.
- [3] J. Schnupp, I. Nelken y A. J. King, *Auditory Neuroscience: Making Sense of Sound*. Mass: MIT Press, 2011.
- [4] P. M. Hofman, A. J. Van Opstal y J. G. A. Van Riswick, “Relearning sound localization with new ears”, *J. Acoustical Soc. America*, vol. 105, n. 2, p. 1035, feb, 1999.
- [5] A. J. Kolarik, B. C. J. Moore, P. Zahorik, S. Cirstea y S. Pardhan, “Auditory distance perception in humans: A review of cues, development, neuronal bases, and effects of sensory loss”. *Attention, Perception, Psychophys.*, vol. 78, n. 2, pp. 373–395, nov, 2015.
- [6] J. Blauert, *Spatial Hearing: The Psychophysics of Human Sound Localization*. Cambridge, Mass: MIT Press, 1997.
- [7] S. Carlile, *Virtual Auditory Space: Generation and Applications*. Berlin, Heidelberg: Springer, 1996.
- [8] P. Zahorik, D. Brungart, A. Bronkhorst. “Auditory distance perception in humans: A summary of past and present research”. *Acta Acustica united with Acustica*. vol. 91, pp. 409-420, 2005.
- [9] G. C. Stecker, F. J. Gallun. “Binaural Hearing, Sound Localization, and Spatial Hearing”, *Translational Perspectives in Auditory Neuroscience: Normal Aspects of Hearing*, 1^a ed. USA: Plural Publishing, 2012, cap. 14. pp. 383-433.
- [10] J. M. Arend, H. R. Liesefeld y C. Pörschmann, “On the influence of non-individual binaural cues and the impact of level normalization on auditory distance estimation of nearby sound sources”, *Acta Acustica*, vol. 5, pp. 10, 2021.
- [11] C. B. Pop, D. Cabrera. “Auditory Room Size Perception for Real Rooms”. *Annual Conference of the Australian Acoustical Society 2005*. Busselton, Western Australia, nov 9-11, 2005. pp. 91-98.
- [12] D. Cabrera, D. Jeong, H. Kwak, J. K. Hyun, K. Ji-Young. “Auditory room size perception for modeled and measured rooms”. *International Congress on Noise Control Engineering 2005, INTERNOISE 2005*. vol. 4, ene, 2005.

- [13] A. J. Kolarik et al., “Factors affecting auditory estimates of virtual room size: Effects of stimulus, level, and reverberation”, *Perception*, vol. 50, n. 7, p. 646–663, mayo, 2021.
- [14] D. J. Tollin y T. C. T. Yin, “Sound localization: Neural mechanisms”, en *Encyclopedia of Neuroscience*. Elsevier, 2009, p. 137–144.
- [15] D. Moroney, “Alessandro striggio’s mass in forty and sixty parts”, *J. Amer. Musicolog. Soc.*, vol. 60, n. 1, pp. 1–70, 2007.
- [16] J. M. Chowning, “The simulation of moving sound sources”, *Comput. Music J.*, vol. 1, n. 3, p. 48, jun, 1977.
- [17] M. Vorländer, *Auralization: Fundamentals of Acoustics, Modelling, Simulation, Algorithms and Acoustic Virtual Reality*. Springer International Publishing, 2020.
- [18] E. Torres, “Fotoantropometría automatizada para personalizar funciones de transferencia acústica referidas a la cabeza (HRTF)”, Tesis doctoral, Fac. Ing., UNAM, México, 2014.
- [19] K. Watanabe, Y. Iwaya, Y. Suzuki, S. Takane y S. Sato, “Dataset of head-related transfer functions measured with a circular loudspeaker array”, *Acoustical Sci. Technol.*, vol. 35, n. 3, p. 159–165, 2014.
- [20] G.-z. Yu, B.-s. Xie y X.-x. Chen, “Analysis on minimum-phase characteristics of measured head-related transfer functions affected by sound source responses”, *Comput. & Elect. Eng.*, vol. 38, n. 1, pp. 45–51, ene, 2012.
- [21] C. Pössl, J. Schröeter, M. Opitz, P. L. Divenyi y J. Blauert, “Generation of binaural signals for research and home entertainment”, *Proceedings of the 12th International Congress on Acoustics*, vol. 1, B1–6, Jul, 1986.
- [22] F. L. Wightman y D. J. Kistler, “Headphone simulation of free-field listening. II: Psychophysical validation”, *J. Acoustical Soc. America*, vol. 85, n. 2, pp. 868–878, feb, 1989.
- [23] R. F. Lyon, *Human and Machine Hearing: Extracting Meaning From Sound*. Cambridge University Press, 2017.
- [24] E. M. Wenzel, M. Arruda, D. J. Kistler y F. L. Wightman, “Localization using nonindividualized head-related transfer functions”, *J. Acoustical Soc. America*, vol. 94, n. 1, pp. 111–123, jul, 1993.
- [25] M. Zhang, Y. Qiao, X. Wu y T. Qu, “Distance-dependent modeling of head-related transfer functions”, en *ICASSP 2019 - 2019 IEEE Int. Conf. Acoust., Speech Signal Process. (ICASSP)*, Brighton, United Kingdom, 12–17, may, 2019. IEEE, 2019.
- [26] Y. Zhang, Y. Wang y Z. Duan, “HRTF field: Unifying measured HRTF magnitude representation with neural fields”, en *ICASSP 2023 - 2023 IEEE Int. Conf. Acoust., Speech Signal Process. (ICASSP)*, Rhodes Island, Greece, 4–10, jun, 2023. IEEE, 2023.
- [27] L. Pirard, “Spatial Audio and Individualized HRTFs using Convolutional Neural Network (CNN)”, Tesis de maestría en Ingeniería eléctrica, ISIA Department, Faculté Polytechnique de Mons, Bélgica, 2023.

- [28] M. Cuevas, “3D binuaral spatialisation for virtual reality and psychoacoustics”, Tesis doctoral en Ingeniería de telecomunicación, Univ. de Málaga, España, 2019.
- [29] H. Braren, J. Fels, “A High-Resolution Head-Related Transfer Function Data Set and 3D-Scan of KEMAR”. 10.18154/RWTH-2020-11307, 2020.
Disponible: <https://publications.rwth-aachen.de/record/807373>.
- [30] E. D. Sontag, *Mathematical Control Theory* (2^a ed). New York, NY: Springer New York, 1998.
- [31] V. Jurdjevic, *Geometric Control Theory*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1997.
- [32] A. V. Oppenheim, *Signals & Systems* (2^a ed). Upper Saddle River, New Jersey: Prentice Hall, 1997.
- [33] A. Pierce, “Basic linear acoustics”, en *Springer Handbook of Acoustics*. New York, NY: Springer New York, pp. 25–111, 2007.
- [34] M. Kline, *El fracaso de la matemática moderna: Por qué Juanito no sabe sumar* (18^{va} ed). Siglo XXI España Ed., S.A., 1998.
- [35] R. E. Kalman, “Mathematical description of linear dynamical systems”, *J. Soc. Ind. Appl. Math. Ser. Control*, vol. 1, n.2, pp. 152–192, ene, 1963.
- [36] F. Keyrouz, Y. Naous y K. Diepold, “A new method for binaural 3-D localization based on hrtfs”, *2006 IEEE Int. Conf. Acoust. Speed Signal Process.*, Toulouse, Francia. IEEE.
- [37] F. Keyrouz, K. Diepold y P. Dewilde, “Robust 3D robotic sound localization using state-space HRTF inversion”, en *2006 IEEE Int. Conf. Robot. Biomimetics*, Kunming, China, 17–20 de dic, 2006. IEEE, 2006.
- [38] F. Keyrouz y K. Diepold, “A novel biologically inspired neural network solution for robotic 3D sound source sensing”, *Soft Comput.*, vol. 12, n. 7, pp. 721–729, oct, 2007.
- [39] G. Aguilar, M. Carreño y A. Escoto, “Localización de fuentes sonoras por medio de una cabeza binaural”, Tesis de licenciatura en Ing. en comunicaciones y electrónica, Esc. Sup. de Ing. mecánica y eléctrica, IPN, México, 2012.
- [40] J. S. Andersen, R. Miccini, S. Serafin y S. Spagnol, “Evaluation of individualized hrtfs in a 3D shooter game”, *2021 Immersive 3D Audio: Architecture Automot.* (I3DA), Bologna, Italia, 8-10 de sep de 2021. IEEE, 2021.
- [41] R. H. Y. So, N. M. Leung, J. Braasch y K. L. Leung, “A low cost, non-individualized surround sound system based upon head related transfer functions: An ergonomics study and prototype development”, *Appl. Ergonom.*, vol. 37, n. 6, pp. 695–707, nov, 2006.
- [42] D. R. Begault, *3-D Sound for Virtual Reality and Multimedia*. Moffett Field, Calif: NASA, Ames Res. Center, 2000.
- [43] P. Cetta, “Modelos de localización espacial del sonido y su implementación en tiempo real”. Argentina: Pontificia Universidad Católica Argentina. Facultad de Artes y Ciencias Musicales. Instituto de Investigaciones Musicológicas “Carlos Vega”, 2004.

- [44] P. Cetta, *Un modelo para la simulación del espacio en música*. Argentina: Educa, 2007.
- [45] B. Carty, "Movements in Binaural Space: Issues in HRTF Interpolation and Reverberation, with applications to Computer Music". Tesis doctoral, National University of Ireland Maynooth, Irlanda, 2010.
- [46] D. R. Begault, "Head-Up auditory displays for traffic collision avoidance system advisories: A preliminary investigation", *Human Factors: J. Human Factors Ergonom. Soc.*, vol. 35, n. 4, pp. 707–717, dic, 1993.
- [47] K. R. Catchpole, J. D. McKeown y D. J. Withington, "Localizable auditory warning pulses", *Ergonomics*, vol. 47, n. 7, pp. 748–771, jun, 2004.
- [48] A. B. Oving, J. A. Veltman y A. W. Bronkhorst, "Effectiveness of 3-D audio for warnings in the cockpit", *Int. J. Aviation Psychol.*, vol. 14, n. 3, pp. 257–276, jun, 2004.
- [49] R. Martin y K. McAnally, "Interpolation of head-related transfer functions", Fishermans Bend, Victoria: Defence Sci. Technol. Organisation, 2007.
- [50] A. L. Padilla, "Aplicación de tecnologías de sonido biaural para el mejoramiento de la calidad acústica en sistemas de comunicación móvil", Tesis doctoral en Ing. eléctrica, Fac. Ing., UNAM, México, 2012.
- [51] D. Ayllón, "Speech enhancement algorithms for audiological applications", Tesis doctoral, Dep. de teoría de la señal y comunicaciones, Univ. de Alcalá, España, 2013.
- [52] J. C. Middlebrooks, "Sound localization", en *The Human Auditory System - Fundamental Organization and Clinical Disorders*. Elsevier, p. 99–116, 2015.
- [53] J. Martinez-Carranza y C. Rascon, "A review on auditory perception for unmanned aerial vehicles", *Sensors*, vol. 20, n. 24, pp. 7276, dic, 2020.
- [54] C. J. P. (Editor), A. J. O. (Editor), R. R. F. (Editor) y A. N. P. (Editor), Eds., *Pitch: Neural Coding and Perception (Springer Handbook of Auditory Research)*. Springer, 2005.
- [55] M. Clapp, *Análisis Matemático* (3ª ed). México: Papirhos IM-UNAM, 2019.
Edición en línea disponible: https://papierhos.matem.unam.mx/tul/P_T_02/index.html
- [56] C. Gasquet y P. Witomski, *Fourier Analysis and Applications: Filtering, Numerical Computation, Wavelets*. New York, N.Y: Springer, 1999.
- [57] W. Yost, *Fundamentals of Hearing: An Introduction* (4ª ed). EUA: Academic Press, 2000.
- [58] G. B. Folland, *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications* (2ª ed). New York: Wiley, 1999.
- [59] T. Tao, *Analysis II* (3ª ed). Singapore: Springer Singap., 2016.
- [60] O. A. Nielsen, *An Introduction to Integration and Measure Theory*. New York: Wiley, 1997.

- [61] W. Rudin, *Real and Complex Analysis* (3^a ed). New York: McGraw-Hill, 1987.
- [62] J. K. Hale, *Ordinary Differential Equations* (2^a ed). Huntington, N.Y: R. E. Krieger Pub. Co., 1980.
- [63] G. Teschl, *Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems*. Providence, R.I: Amer. Math. Soc., 2011.
Edición en línea disponible: <https://www.mat.univie.ac.at/~gerald/ftp/book-ode/>
- [64] H. Amann, *Ordinary Differential Equations: An Introduction to Nonlinear Analysis*. Berlin: Gruyter, 1990.
- [65] R. C. DiPrima y W. E. Boyce, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems* (7^a ed). Wiley Sons, Inc. John, 2008.
- [66] M. Baake y U. Schlägel, "The Peano-Baker series", *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 275, n. 1, pp. 155–159, dic, 2011.
- [67] S. Lang, *Linear algebra*. New York, NY: Springer New York, 1987.
- [68] F. G. Ramos, "Existencia y regularidad de soluciones del problema de Poisson", Tesis de licenciatura en Matemáticas, FC., UNAM, México, 2008.
- [69] J. P. Fichtl, "Análisis de Fourier Aplicado a la Convolución en Tiempor Real", Tesis de licenciatura en Matemáticas, FC., UNAM, México, 2023.
- [70] L. V. Ahlfors, *Complex Analysis*. McGraw, 1966.
- [71] O. Staffans, (2009). Transfer Functions (Notas de curso - Åbo Akademi - Finlandia) [PDF]. Disponible: <https://web.abo.fi/fak/mnf/mate/kurser/transfunc/transfunc.pdf>.
- [72] G. Gripenberg. (trad. al inglés O. Staffans) (2009). Fourier Analysis (Notas de curso - Åbo Akademi - Finlandia) [PDF]. Disponible: <https://web.abo.fi/fak/mnf/mate/kurser/fourieranalys/fourier.pdf>.
- [73] Chi-Tsong Chen, *Linear system theory and design*. New York: Oxford University Press, 1999.
- [74] J. K. Hunter y B. Nachtergaele, *Applied Analysis*. World Sci. Publ. Co., 2001.
- [75] R. Lyons, "Understanding Digital Signal Processing's Frequency Domain". *RF Design Magazine*, Jun, 2001.
- [76] K. Gerald, *A Friendly Guide to Wavelets*. Boston: Birkhäuser, 1994.
- [77] J. O. Smith, *Mathematics of the Discrete Fourier Transform (DFT): With Music and Audio Applicaitons*. [S.I.]: W3K Pub., 2003.
Edición en línea disponible: <https://ccrma.stanford.edu/~jos/st/>
- [78] M. Bruneau, Ed., *Fundamentals of Acoustics*. London, UK: ISTE, 2006.
- [79] H. V. Helmholtz, *On the Sensations of Tone as a Physiological Basis for the Theory of Music*, (3^a ed). London: Longmans, Green, Co., 1895.

- [80] L. Colomer, *Acústica Musical*. España: Publicación independiente, 2016. Disponible: <http://cursodeacusticamusical.blogspot.com>.
- [81] C. Rascon, (s.f.). Notas del Curso de Procesamiento Digital de Audio (Sesión 04.4: Transformada de Fourier: Aspectos Prácticos) [PDF]. Disponible: <https://calebrascon.info/PDA/>.
- [82] D. S. Brungart, "Near-field auditory localization", Tesis doctoral, MIT, 1998.
- [83] L. E. Kinsler, Ed., *Fundamentals of Acoustics*, (4^a ed). New York: Wiley, 2000.
- [84] M. Tikander, "Model-based curvefitting for in-situ impedance measurements", Tesis de maestría, Helsinki University of Technology, 2002.
Disponible: https://www.researchgate.net/publication/242641740_Model-based_curvefitting_for_in-situ_impedance_measurements
- [85] V. Giurgiutiu, *Structural Health Monitoring With Piezoelectric Wafer Active Sensors*. Elsevier, 2014.
- [86] A. Everest y K. Pohlmann, *Master Handbook of Acoustics*. McGraw-Hill Educ., 2014.
- [87] M. R. Schroeder, "Architectural acoustics", *Science*, vol. 151, n. 3716, pp. 1355–1359, mar, 1966.
- [88] A. Gade, "Acoustics in halls for speech and music", en *Springer Handbook of Acoustics*. New York, NY: Springer New York, pp. 301–350, 2007.
- [89] A. Alpkocak y M. Sis, "Computing impulse response of room acoustics using the ray-tracing method in time domain", *Arch. Acoust.*, vol. 35, n. 4, pp. 505–519, dic, 2010.
- [90] H. Lehnert y J. Blauert, "Principles of binaural room simulation", *Appl. Acoust.*, vol. 36, n. 3-4, pp. 259–291, 1992.
- [91] L. Savioja y U. P. Svensson, "Overview of geometrical room acoustic modeling techniques", *J. Acoustical Soc. America*, vol. 138, n. 2, pp. 708–730, ago, 2015.
- [92] R. Scheibler, E. Bezzam y I. Dokmanic, "Pyroomacoustics: A python package for audio room simulation and array processing algorithms", en *ICASSP 2018 - 2018 IEEE Int. Conf. Acoust., Speech Signal Process. (ICASSP)*, Calgary, AB, 15–20 de abr, de 2018. IEEE, 2018.
- [93] N. Xiang y G. M. Sessler, *Acoustics, Information, and Communication: Memorial Volume in Honor of Manfred R. Schroeder*. Springer Lond., Ltd., 2014.
- [94] A. Farina, "Advancements in impulse response measurements by sine sweeps", presentado en Audio Engineering Society Convention 122, mayo, 2007.
- [95] Y. Suzuki, F. Asano, H. Kim y T. Sone, "An optimum computer-generated pulse signal suitable for the measurement of very long impulse responses", *J. Acoustical Soc. America*, vol. 97, n. 2, pp. 1119–1123, feb, 1995.
- [96] H. Møller, "Fundamentals of binaural technology", *Appl. Acoust.*, vol. 36, n. 3-4, pp. 171–218, 1992.

- [97] D. Toledo, H. Møller, “Issues on dummy-head HRTFs measurements”, en *Audio Engineering Society Convention Papers*, AES, 2009.
Disponible: <https://vbn.aau.dk/da/publications/issues-on-dummy-head-hrtfs-measurements>
- [98] B. Xie, *Head-Related Transfer Function and Virtual Auditory Display*, 2^a ed. Ross Publ., Inc., J., 2013.
- [99] K. Iida, *Head-Related Transfer Function and Acoustic Virtual Reality*. Springer, 2019.
- [100] M. Queiroz y G. Sousa, *Structured IIR models for HRTF interpolation*, 36th ICMC 2010: New York, USA 2010.
- [101] G. Ramos, M. Cobos, B. Bank y J. A. Belloch, “A parallel approach to HRTF approximation and interpolation based on a parametric filter model”, *IEEE Signal Process. Lett.*, vol. 24, n. 10, pp. 1507–1511, oct, 2017.
- [102] A. E. Acosta, “Análisis comparativo de métodos de interpolación de HRTFs basados en ponderaciones mediante simulaciones en matlab”, Tesis de licenciatura en Ing. electrónica y telecomunicaciones, Fac. Ing., EPN Ecuador, 2019.
- [103] C. R. Mora, “Optimización del modelamiento de la función de transferencia relativa a la cabeza desde el esquema de representación de armónicos esféricos”, Tesis de maestría en Ing. electrónica, Fac. Ing., Pontificia Univ. Javeriana, Bogotá, Colombia, 2022.
- [104] N. Adams, “A Model of Head-Related Transfer Functions based on a State-Space Analysis” Tesis doctoral en Ing. eléctrica, Univ. of Michigan, EUA, 2008.
- [105] S. Li y J. Peissig, “Measurement of head-related transfer functions: A review”, *Appl. Sci.*, vol. 10, n. 14, p. 5014, jul, 2020.
- [106] P. Novo, “Auditory virtual environments”, en *Communication Acoustics*. Berlin/Heidelberg: Springer-Verlag, pp. 277–297.
- [107] S. Prepelitã, “Verification and validation of wave-based simulations of head-related transfer functions”, Tesis doctoral en ciencias (tecnología), Aalto Univ., Espoo, Finlandia, 2020.
- [108] S. Puria y C. R. Steele, “Mechano-Acoustical transformations”, en *The Senses: A Comprehensive Reference*. Elsevier, 2008, pp. 165–201.
- [109] D. D. Greenwood, “A cochlear frequency-position function for several species—29 years later”, *J. Acoustical Soc. America*, vol. 87, n.º 6, pp. 2592–2605, jun, 1990.
- [110] E. D. Young, “Physiological acoustics”, en *Springer Handbook of Acoustics*. New York, NY: Springer New York, 2014, pp. 445–473.
- [111] J. C. R. Licklider, “A duplex theory of pitch perception”, *J. Acoustical Soc. America*, vol. 23, n. 1, pp. 147, ene, 1951.
- [112] A. R. Palmer, I. J. Russell, “Phase-locking in the cochlear nerve of the guinea-pig and its relation to the receptor potential of inner hair-cells”, *Hearing Res.*, vol. 24, n. 1, pp. 1–15, ene, 1986.

- [113] R. R. de Ruyter van Steveninck, G. D. Lewen, S. P. Strong, R. Koberle, W. Bialek, "Reproducibility and variability in neural spike trains", *Science*, vol. 275, n. 5307, pp. 1805–1808, mar, 1997.
- [114] J. Wall, "Post-Cochlear Auditory Modelling for Sound Localisation using Bio-Inspired Techniques", Tesis doctoral, Univ. of Ulster Faculty of Computing and Engineering, Inglaterra, 2010.
- [115] B. Wright, K. Sen, W. Bialek, A. Doupe, "Spike Timing and the Coding of Naturalistic Sounds in a Central Auditory Area of Songbirds", en *Advances in Neural Information Processing Systems 14*. The MIT Press, 2001.
- [116] B. Delgutte, "Auditory neural processing of speech", en *The handbook of phonetic sciences*, Oxford: Blackwell, 1997, cap. 16, pp. 507–538.
- [117] W. Gerstner, W. M. Kistler, R. Naud y L. Paninski, "Introduction: Neurons and mathematics", en *Neuronal Dynamics*. Cambridge: Cambridge University Press, pp. 3–27, 2014.
- [118] H. Gray, *Anatomy of the Human Body*. Lea & Febiger, 1918.
- [119] L. A. Jeffress, "A place theory of sound localization", *J. Comparative Physiol. Psychol.*, vol. 41, n. 1, p. 35–39, 1948.
- [120] W. Koenig, H. K. Dunn y L. Y. Lacy, "The sound spectrograph", *J. Acoustical Soc. America*, vol. 18, n. 1, pp. 19–49, jul, 1946.
- [121] R. Meddis y M. J. Hewitt, "Virtual pitch and phase sensitivity of a computer model of the auditory periphery. I: Pitch identification", *J. Acoustical Soc. America*, vol. 89, n. 6, pp. 2866–2882, jun, 1991.
- [122] R. Meddis y L. O'Mard, "A unitary model of pitch perception", *J. Acoustical Soc. America*, vol. 102, n. 3, pp. 1811–1820, sep, 1997.
- [123] C. Rascon, (s.f.). Notas del Curso de Procesamiento Digital de Audio (Sesión 1: Introducción) [PDF]. Disponible: <https://calebrascon.info/PDA/>.
- [124] I. Lopatovska et al., "Talk to me: Exploring user interactions with the Amazon Alexa", *J. Librarianship Inf. Sci.*, vol. 51, n. 4, pp. 984–997, marzo de 2018.
- [125] J. R. Bellegarda, "Spoken language understanding for natural interaction: The siri experience", en *Natural Interaction With Robots, Knowbots and Smartphones*. New York, NY: Springer New York, 2013, pp. 3–14.
- [126] S. Ben-David y S. Shalev-Shwartz, *Understanding Machine Learning: From Theory to Algorithms*. Cambridge Univ. Press, 2014.
- [127] R. D. Patterson, K. Robinson, J. Holdsworth, D. McKeown, C. Zhang y M. Allerhand, "Complex sounds and auditory images", en *Auditory Physiology and Perception*. Elsevier, 1992, pp. 429–446.
- [128] B. R. Glasberg y B. C. J. Moore, "Derivation of auditory filter shapes from notched-noise data", *Hearing Res.*, vol. 47, n. 1-2, pp. 103–138, agosto 1990.

- [129] M. Slaney, "An efficient implementation of the Patterson-Holdsworth auditory filter bank", Apple Computer Technical Report #35 Perception, Apple Computer, Inc, 1993.
- [130] P. Majdak, C. Hollomey y R. Baumgartner, "AMT 1.x: A toolbox for reproducible research in auditory modeling", *Acta Acust.*, vol. 6, p. 19, 2022.
- [131] T. R. Letowski y S. T. Letowski, "Auditory spatial perception: Auditory localization", Defense Technical Information Center, Fort Belvoir, VA, may, 2012.
- [132] V. R. Algazi, C. Avendano y R. O. Duda, "Elevation localization and head-related transfer function analysis at low frequencies", *J. Acoustical Soc. America*, vol. 109, n. 3, p. 1110–1122, mar, 2001.
- [133] J. C. Middlebrooks, "Individual differences in external-ear transfer functions reduced by scaling in frequency", *J. Acoustical Soc. America*, vol. 106, n. 3, p. 1480–1492, sep, 1999.
- [134] J. Nam, J. S. Abel, J. O. Smith, "A Method for Estimating Interaural Time Difference for Binaural Synthesis", *J. of The Audio Engineering Soc.*, 2008.
- [135] M. M. Van Wanrooij, y A. J. Van Opstal, "Relearning sound localization with a new ear", *J. Neurosci.*, vol. 25, n. 22, p. 5413–5424, jun, 2005.
- [136] S. Carlile, K. Balachandar y H. Kelly, "Accommodating to new ears: The effects of sensory and sensory-motor feedback", *J. Acoustical Soc. America*, vol. 135, n. 4, p. 2002–2011, abr, 2014.
- [137] A. R. Møller, "Anatomy and physiology of the auditory system", en *Textbook of Tinnitus*. New York, NY: Springer New York, 2011, p. 51–68.
- [138] P. X. Joris, P. H. Smith y T. C. T. Yin, "Coincidence detection in the auditory system: 50 years after Jeffress", *Neuron*, vol. 21, n. 6, p. 1235–1238, dic, 1998.
- [139] P. Schuette, *Demystifying MAX/MSP*, EUA: Publicación independiente, 2013. Disponible: <https://www.paulschuette.com/wp-content/uploads/2013/01/DEMYSTIFYING-MAXMSP.pdf>.
- [140] R. Susnik, J. Sodnik, A. Umek y S. Tomazic, "Spatial sound generation using HRTF created by the use of recursive filters", en *IEEE Region 8 EUROCON 2003. Comput. as Tool.*, Ljubljana, Slovenia. IEEE.
- [141] N. L. Aaronson y W. M. Hartmann, "Testing, correcting, and extending the Woodworth model for interaural time difference", *J. Acoustical Soc. America*, vol. 135, n.º 2, pp. 817–823, feb, 2014.
- [142] R. Shakarchi y E. M. Stein, *Real Analysis: Measure Theory, Integration, and Hilbert Spaces*. Princeton Univ. Press, 2005.
- [143] G. V. Bèkèsy, "Current status of theories of hearing", *Science*, vol. 123, n. 3201, pp. 779–783, mayo, 1956.
- [144] W. Rutherford, "A lecture on the sense of hearing: Delivered before the British Association at Birmingham on September 6th, 1886", *Lancet I*, 2–6, 1887.