Transformada de Fourier:
Aspectos Prácticos

En teoría,
no hay diferencia entre la teoría y la práctica…

pero en la práctica, sí la hay.

Fourier Práctico

- Hay una cantidad considerable de problemas importantes que tenemos considerar al aplicar la Transformada de Fourier:

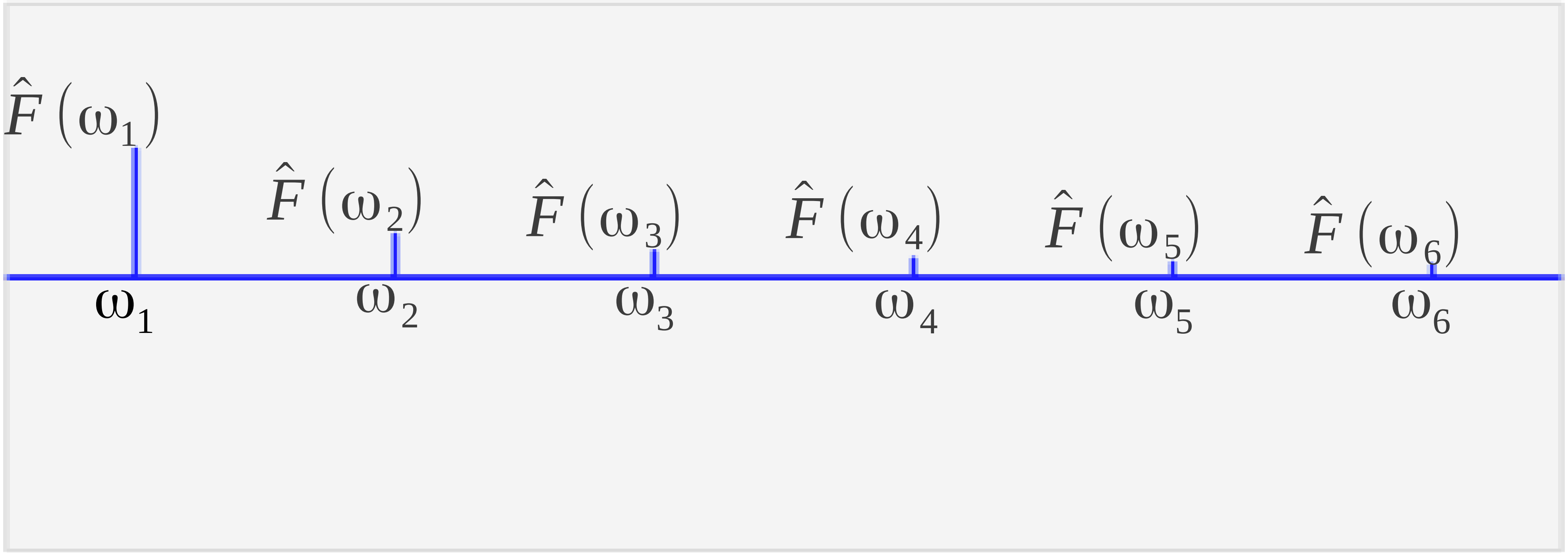
Problema #1

- **¿Con cuáles frecuencias representamos a una señal?**
- Harry Nyquist y Claude Shannon introdujeron un teorema que dice que: “para determinar completamente una señal con un ancho de banda conocido, se debe muestrear con una onda que tenga ***una frecuencia mayor al doble de su frecuencia máxima***”.

Problema #1

- **Mejor dicho:**
  - "Si una señal es muestreada con una frecuencia ω_s, entonces la frecuencia máxima que puede ser representada en el dominio de Fourier es $\omega_s/2$".

- Tenemos una señal f muestreada de 48000 Hz.
- Si ω_6 es su máxima frecuencia, entonces ésta debe ser 24000*(2π).
- El resto de las ω_n están espaciadas uniformemente de ahí para atrás.



$$\hat{f}$$

Problema #2

- Si la formula de Euler es:

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$$

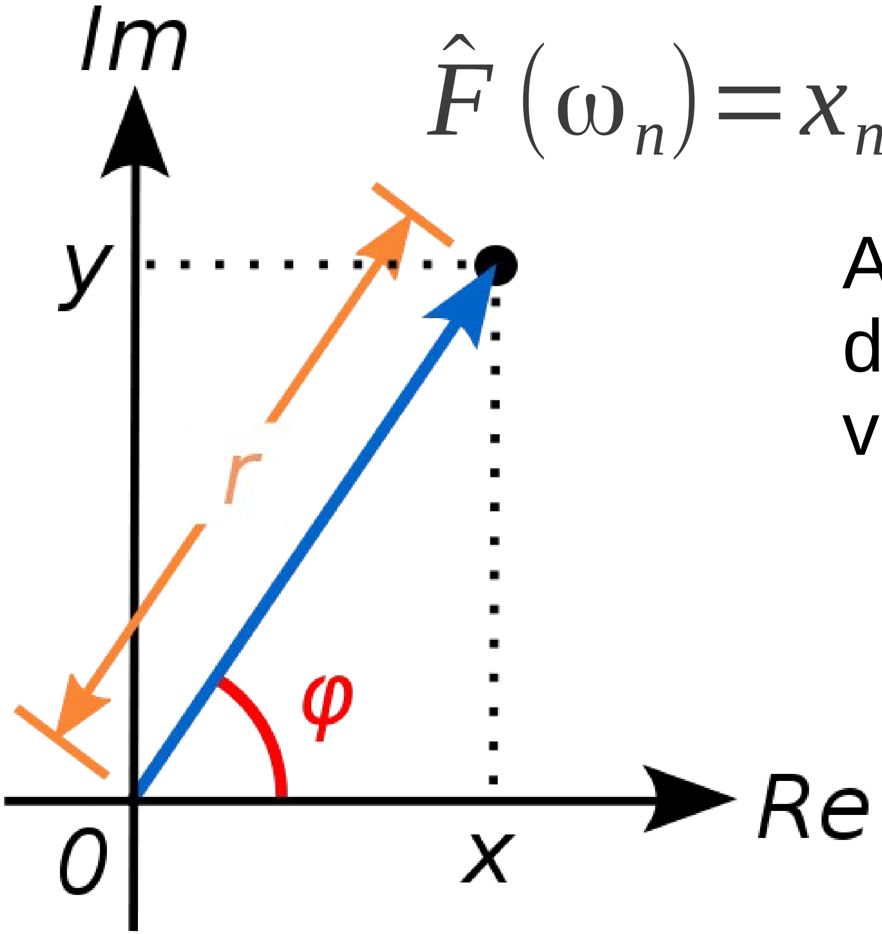
- Y la transformada dice que:

$$\hat{F}(\omega_n) = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T} f(t) e^{-i \omega_n t}$$

- Entonces $F(\omega_n)$ es un número complejo.

Números Complejos

- Un número complejo es la sumatoria de dos valores: uno real y uno imaginario.



$$\hat{F}(\omega_n) = x_n + iy_n$$

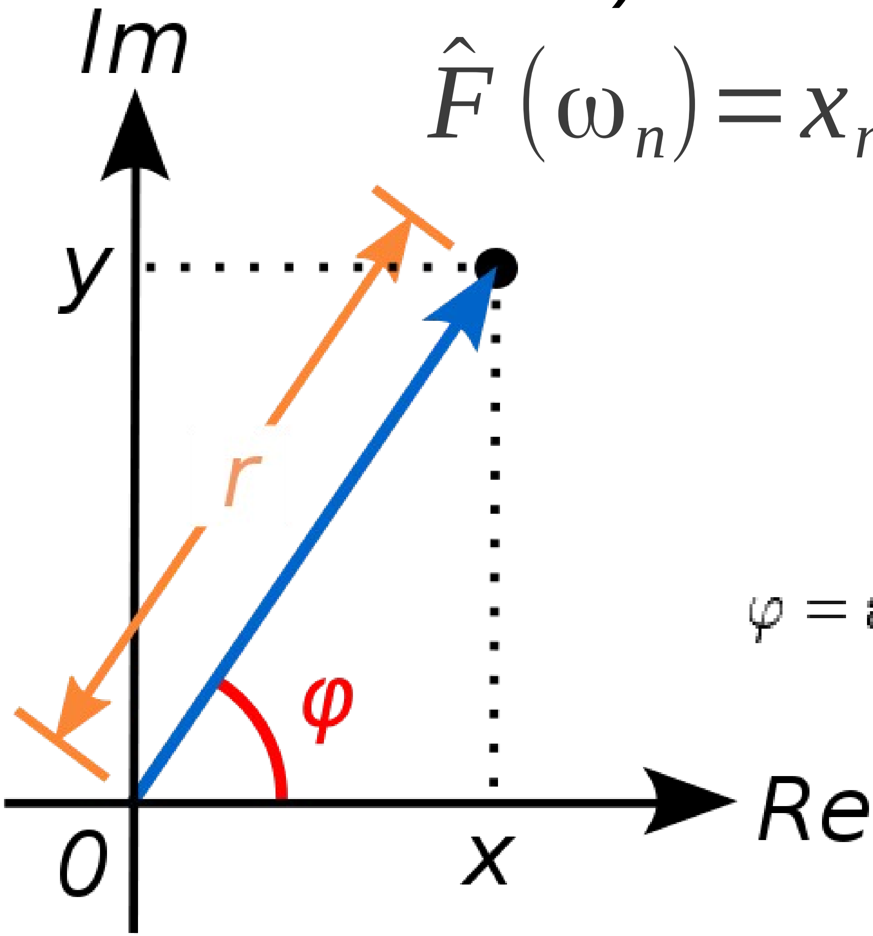
Al visualizar la señal en el dominio de frecuencia, usualmente lo que vemos es la magnitud de $F(\omega_n)$:

$$|\hat{F}(\omega_n)| = \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$$

Números Complejos: Fase

- La “fase” de la frecuencia es el ángulo del número complejo (fácilmente calculado con atan2 en C).

$$\hat{F}(\omega_n) = x_n + i y_n$$



$$\varphi = \arg(z) = \begin{cases} \arctan(\frac{y}{x}) & \text{if } x > 0 \\ \arctan(\frac{y}{x}) + \pi & \text{if } x < 0 \text{ and } y \geq 0 \\ \arctan(\frac{y}{x}) - \pi & \text{if } x < 0 \text{ and } y < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{if } x = 0 \text{ and } y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{if } x = 0 \text{ and } y < 0 \\ \text{indeterminate} & \text{if } x = 0 \text{ and } y = 0. \end{cases}$$

Números Complejos

- Es crucial recordar esto al estar manipulando las magnitudes en tiempo real.
- Se pueden hacer restas, multiplicaciones, etc. pero se tienen que hacer considerando que dichas operaciones serán sobre números complejos.

No me toquen la fase...

- Ejemplo de cancelación de ruido: tienen la firma espectral del ruido (**E**), y quieren restarla de la entrada (**X**) para sacarla a la salida (**Y**).
  - Todo en el dominio de la frecuencia.
- Es tentador hacer:

$$Y(\omega_n) = X(\omega_n) - E(\omega_n)$$

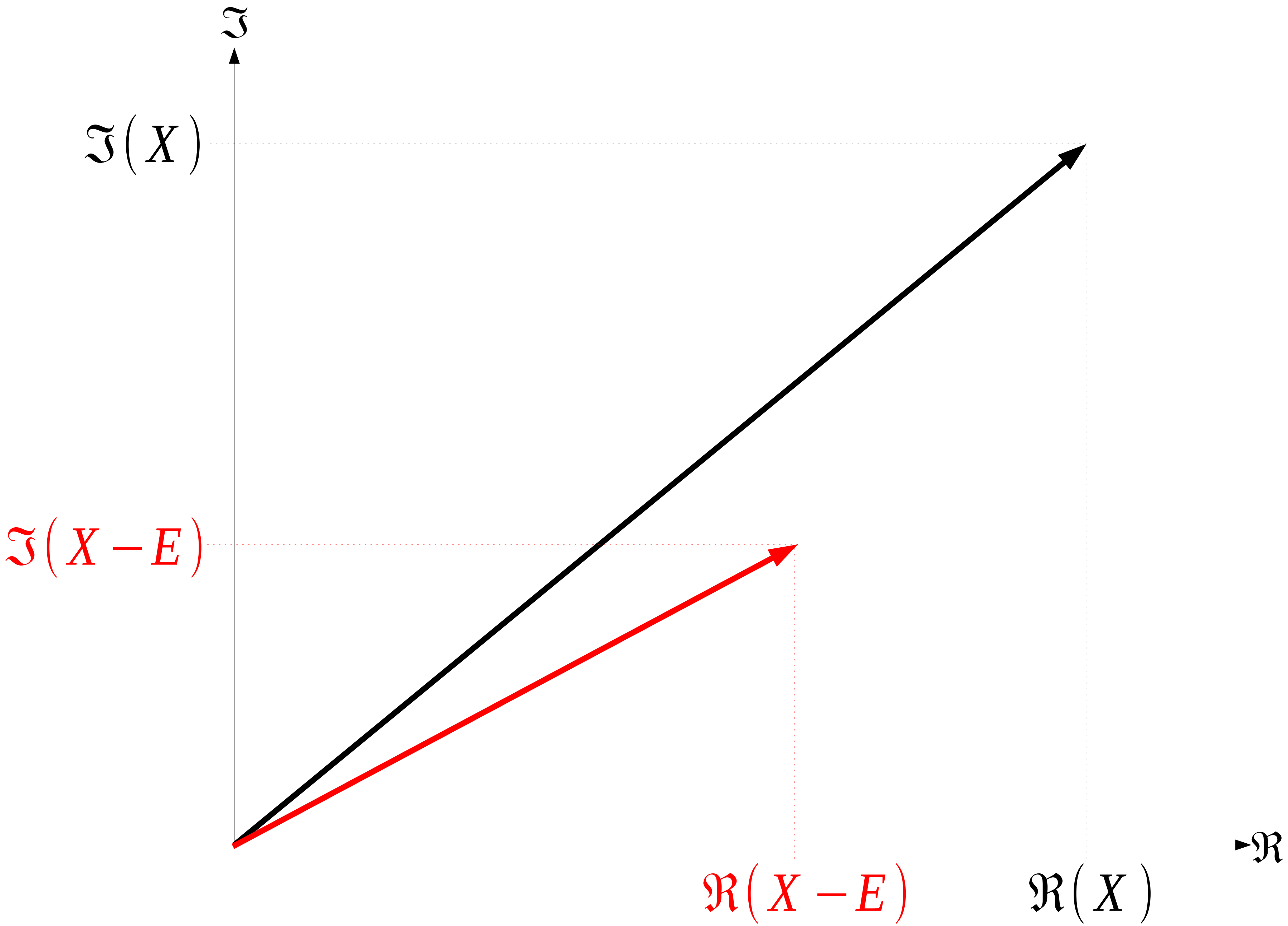
Pero...

- Esto equivale a:

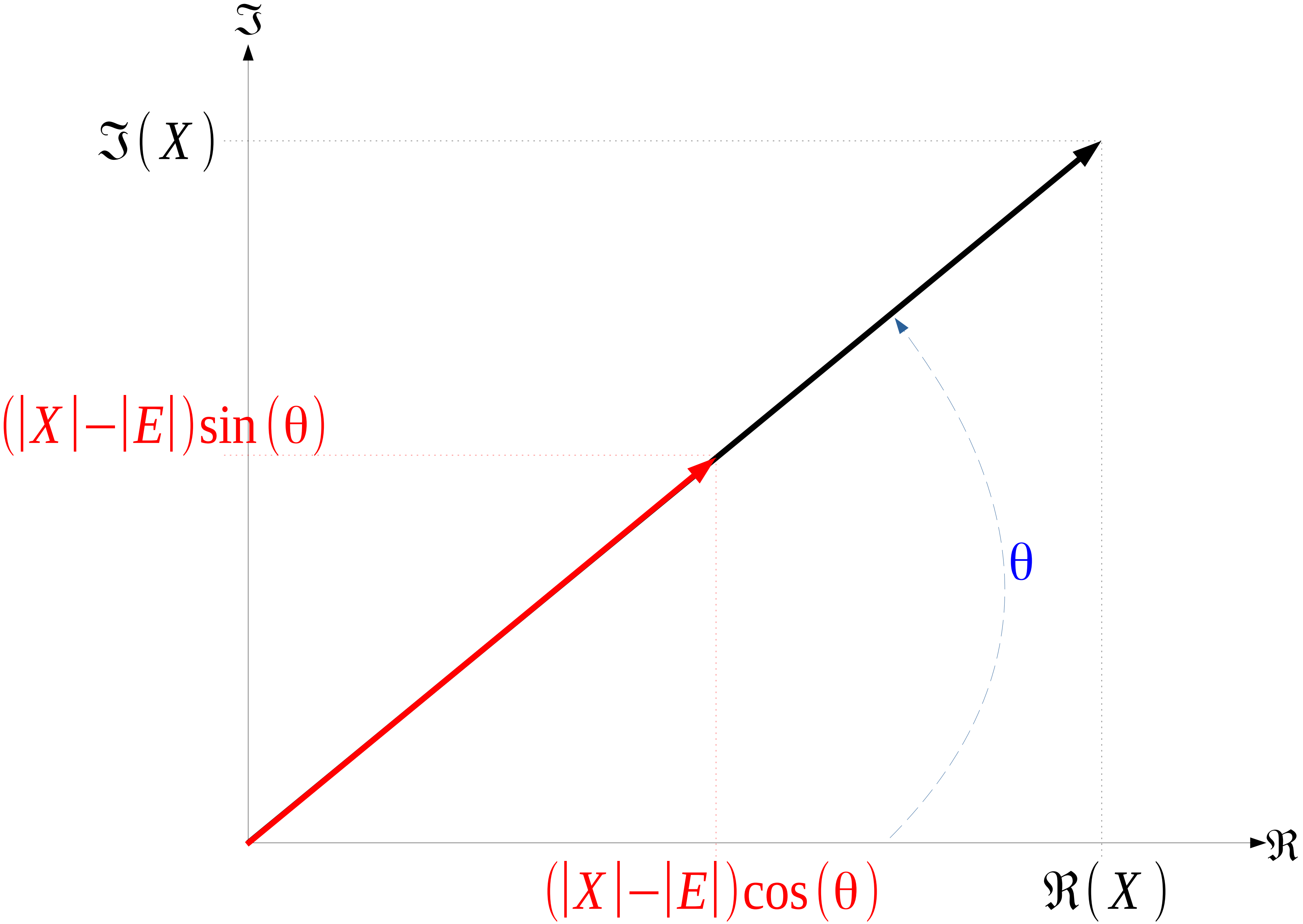
$$\Im\left(Y\left(\omega_n\right)\right)=\Im\left(X\left(\omega_n\right)\right)-\Im\left(E\left(\omega_n\right)\right)$$

$$\Re\left(Y\left(\omega_n\right)\right)=\Re\left(X\left(\omega_n\right)\right)-\Re\left(E\left(\omega_n\right)\right)$$

Lo cual puede modificar la fase



Realmente queremos esto



NO ME TOQUEN LA FASE

$$A_{\omega_n} = |X(\omega_n)| - |E(\omega_n)|$$

$$\theta_{\omega_n} = \theta(X(\omega_n))$$

$$Y(\omega_n) = A_{\omega_n} \cos(\theta_{\omega_n}) + i\, A_{\omega_n} \sin(\theta_{\omega_n})$$

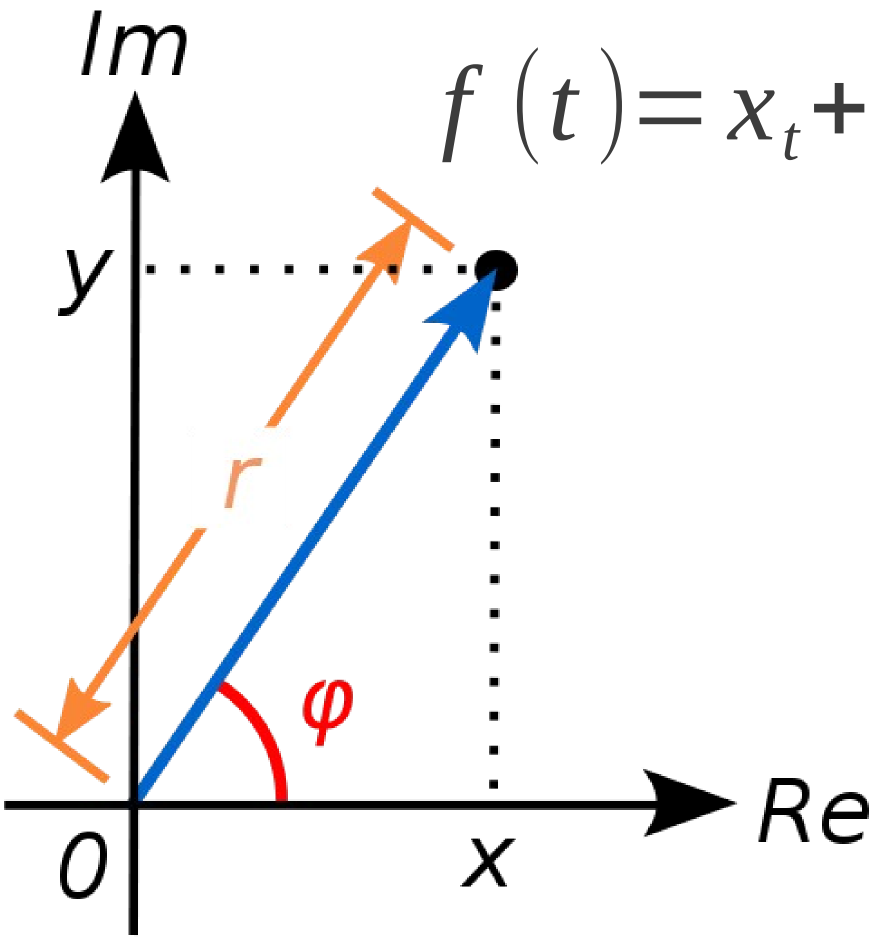
Problema #2.5

- El resultado de la Transformada Inversa también es un número complejo:

$$f(t)=\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\hat{F}(\omega_n)\mathrm{e}^{i\omega_n t}$$

Problema #2.5

- No es un problema realmente, ya que la energía en el tiempo se presenta en la parte real del número calculado:



$$f(t) = x_t + iy_t$$

$$f(t) \leftarrow \Re(f(t)) = x_t$$

Por lo que el resultado final, realmente es un número real, común y corriente.

Problema #3

- **MITO:** Si el tamaño de la señal en tiempo es la misma que la señal en frecuencia, entonces una señal de 1024 puntos en el tiempo tendrá 1024 puntos de frecuencia.

- Cierto y falso. Sí, serán 1024 puntos de frecuencia, pero no todos representan a una frecuencia única.

La Transformada Inversa

- Habíamos dicho que la transformada inversa es:

$$f(t)=\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\hat{F}(\omega_n)\mathrm{e}^{i\omega_n t}$$

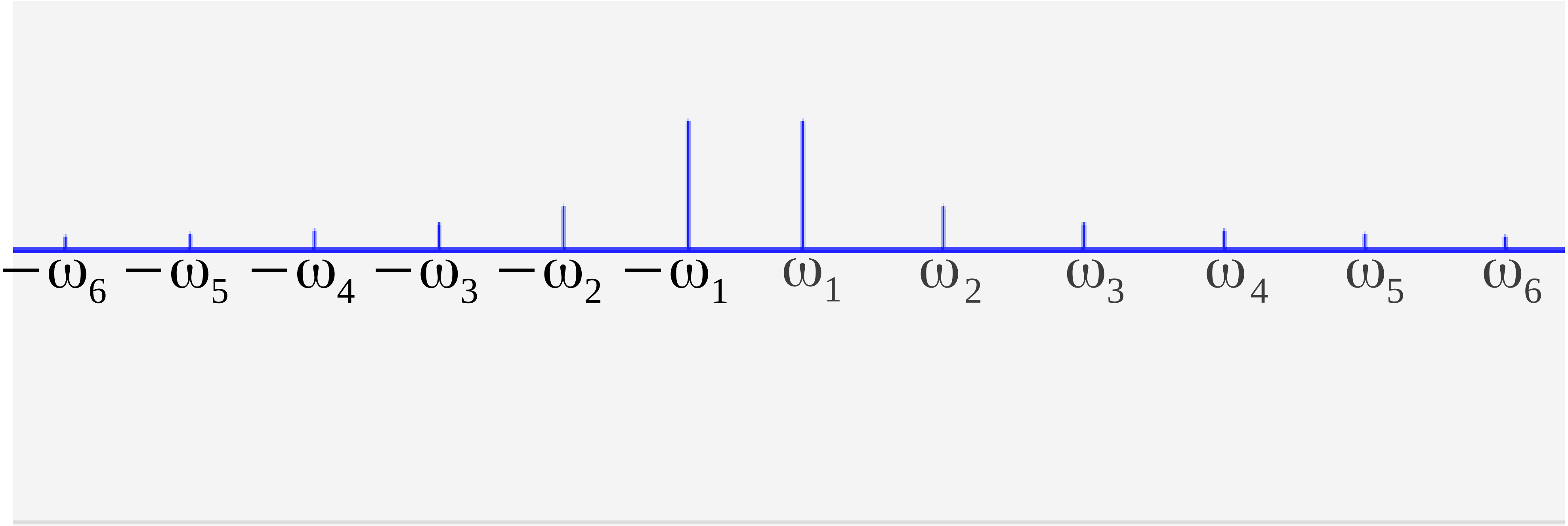
La **Real** Transformada Inversa

- La verdadera transformada inversa es la siguiente:

$$f(t)=\frac{1}{2N}\sum_{n=-N}^{N}\hat{F}(\omega_n)e^{i\omega_n t}$$

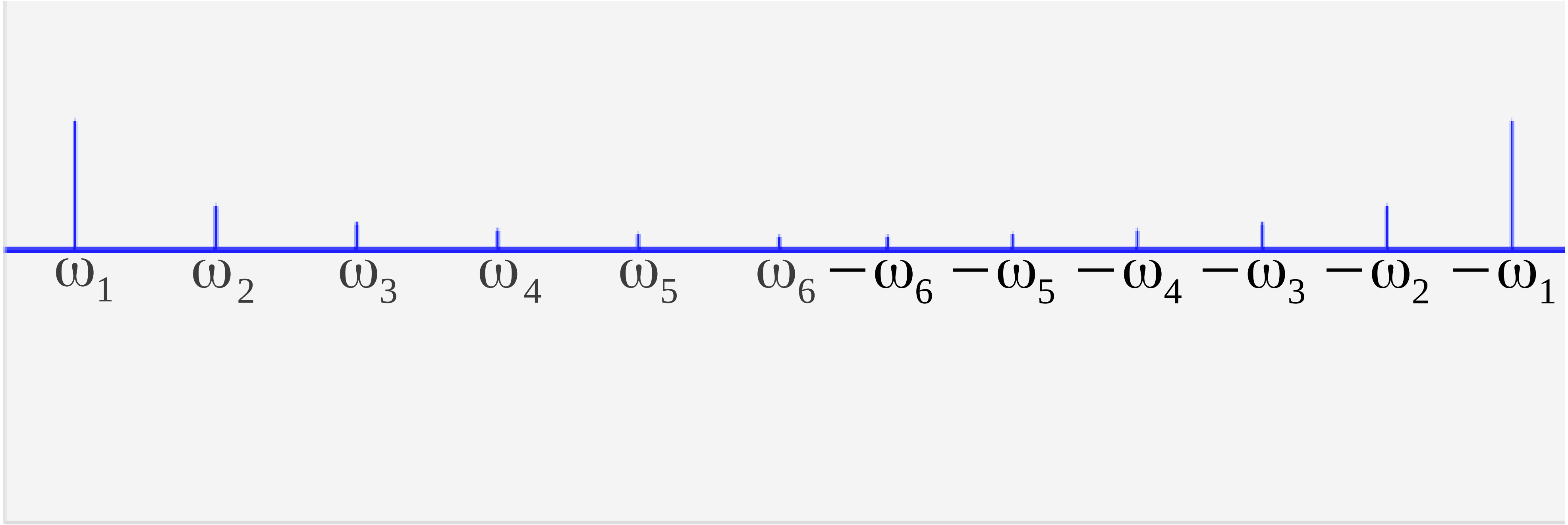
- Sí, hay tal cosa como “frecuencias negativas”, porque Fourier quiso realmente fregar nuestras mentes.

El Resultado de la Transformada de Fourier



Este espejeo tiene que ver con el cálculo de las partes imaginarias y las partes reales de la Transformada de Fourier y los famosos “Círculos de Harmónicos”, ilustrados brevemente en el video “FourierCircles.mp4” de la página del curso.

Lo que normalmente se nos entrega en las implementaciones de Fourier:

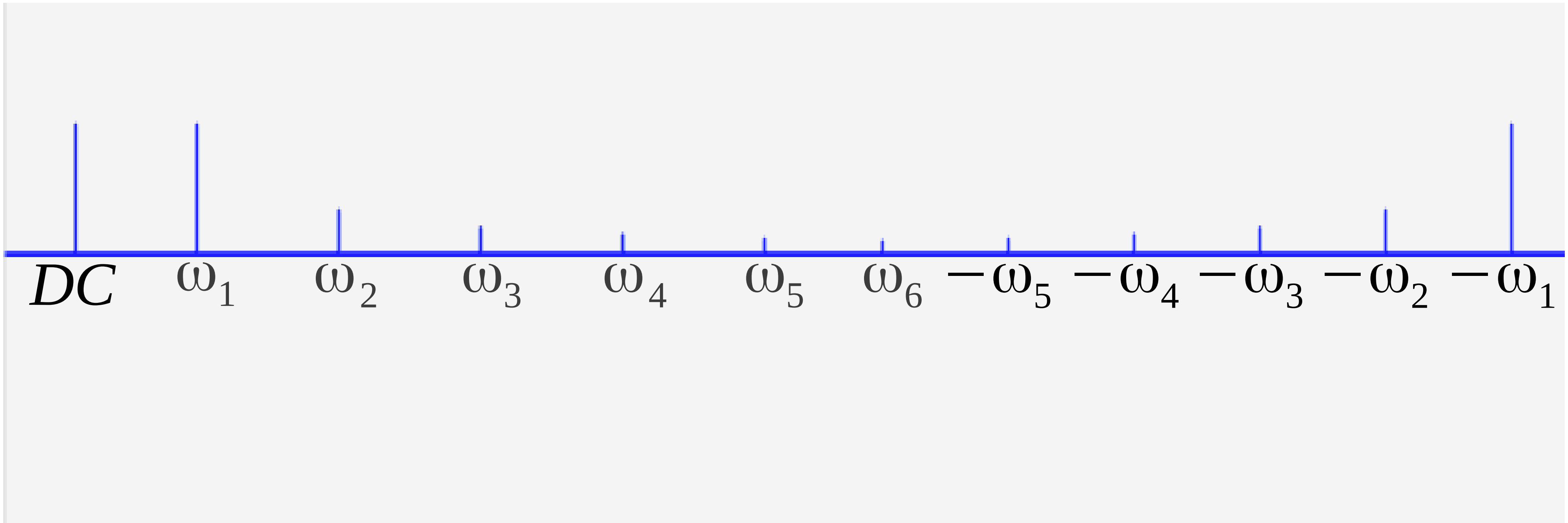


No sé por qué, honestamente.

Supongo que es más sencillo manejar los índices de al principio del vector.

También, cabe mencionar que...

El Componente DC

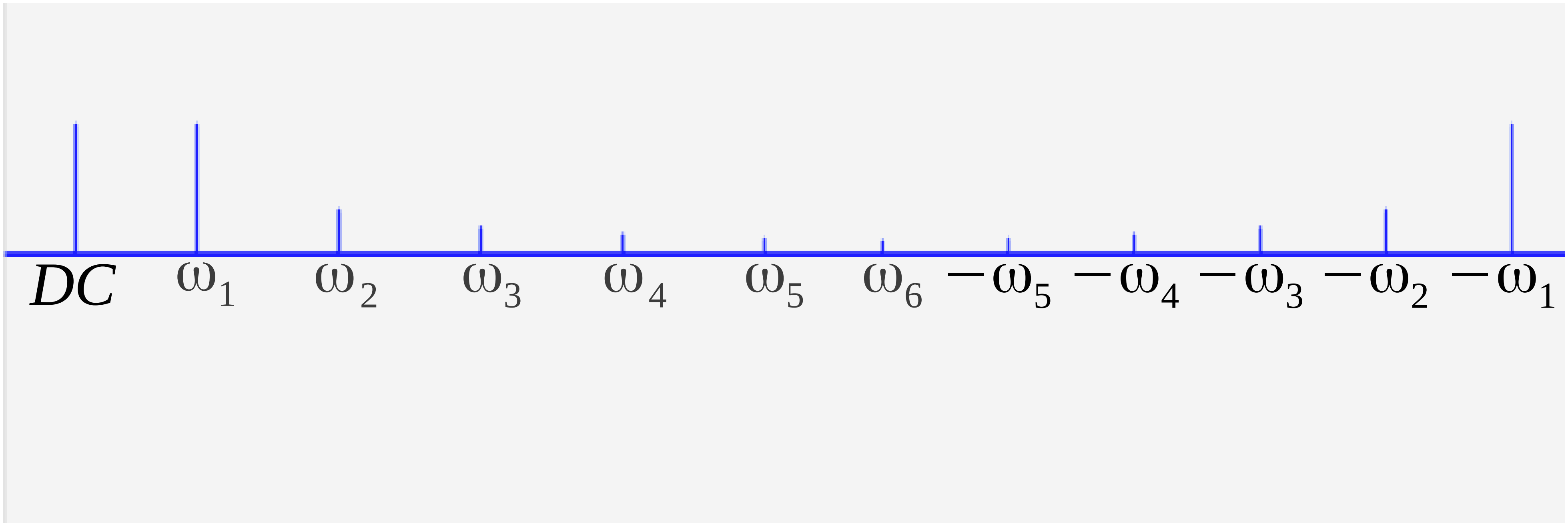


DC, al estar programando se le asigna una frecuencia de 0 Hz.

Representa el “centro” de la señal en el eje vertical. Las señales de audio normalmente están centradas en 0, por lo que esta componente no “sale” en al visualizar la señal en el dominio de la frecuencia, pero se tiene que considerar.

Por lo tanto...

Esto es con lo que vamos a trabajar:



CONCLUSIÓN: El resultado de transformar una señal de 1024 puntos en el tiempo es una señal con 1024 puntos en frecuencia "espejeados", realmente calculando 512 puntos útiles.

POR LO TANTO: al manipular el valor en una frecuencia, se tiene que manipular, de la misma manera, su **contraparte en el "espejo"** de la señal en el dominio de la frecuencia.

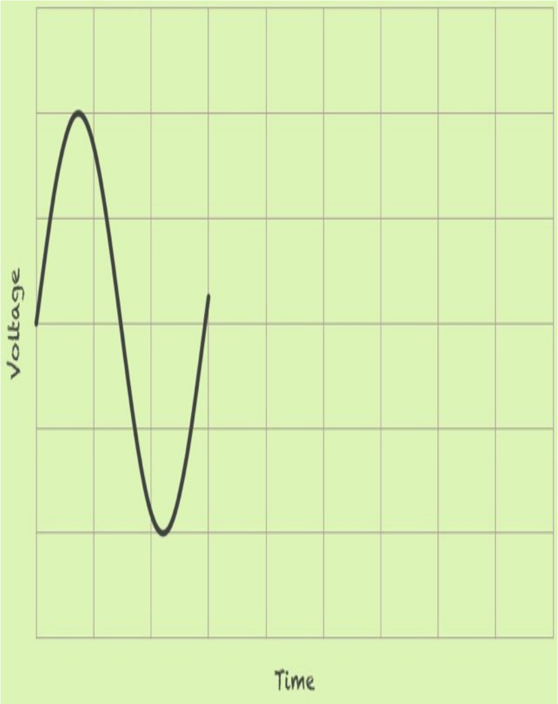
Problema #4

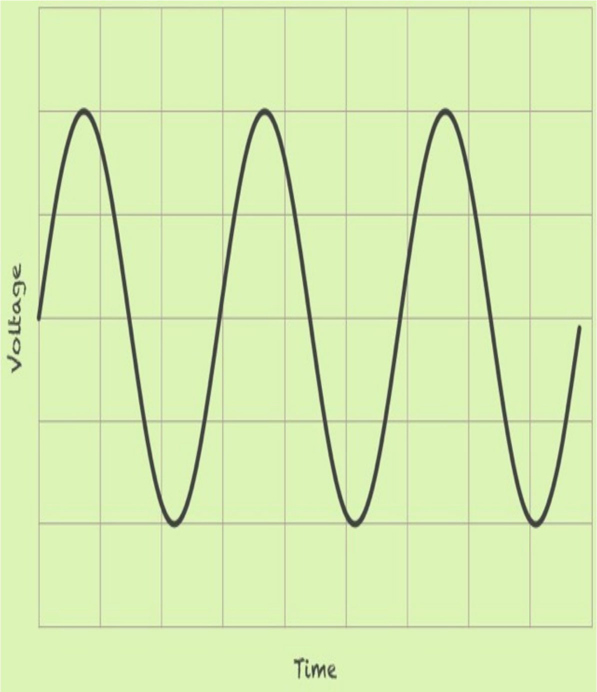
- Fourier propuso que “varias ondas sumadas entre si pueden ser utilizadas para representar cualquier señal *periódica*.”
- **¿Qué sucede si nuestra señal no es periódica?**

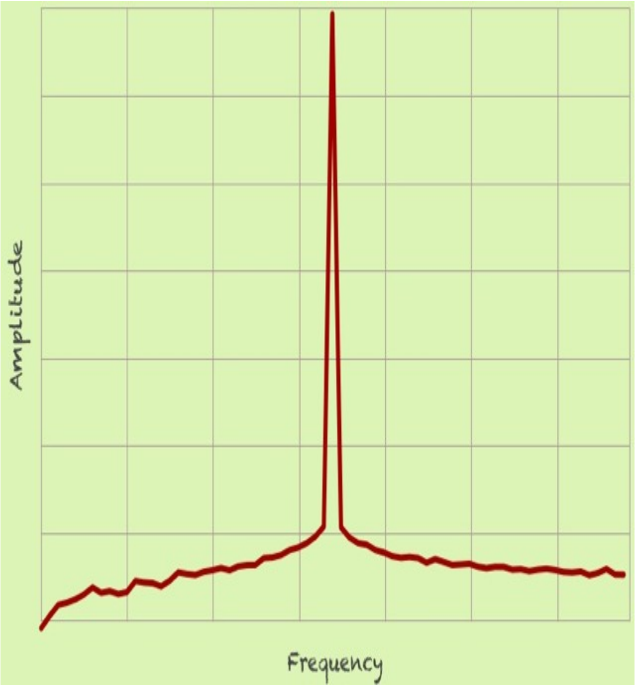
Problema #4

- Hacemos trampa: suponemos que nuestra señal tiene un periodo del *tamaño de la señal*.
- Para que esto funcione adecuadamente, tenemos que cerciorarnos que nuestra señal comience y termine *con valores no discontínuos*.

Problema #4





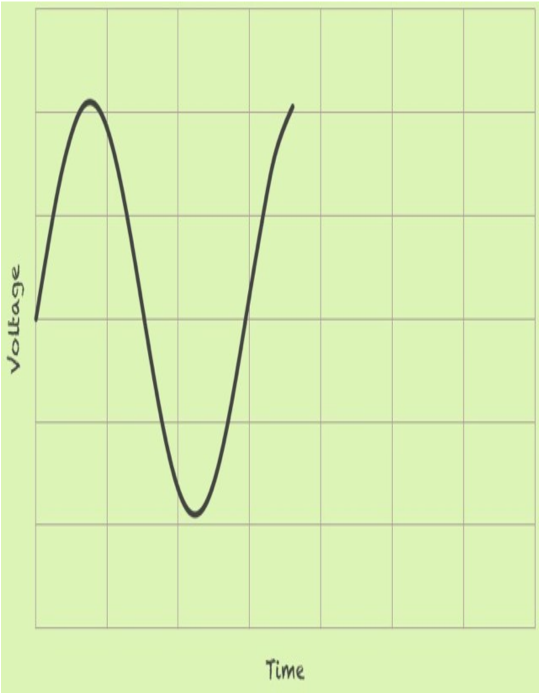


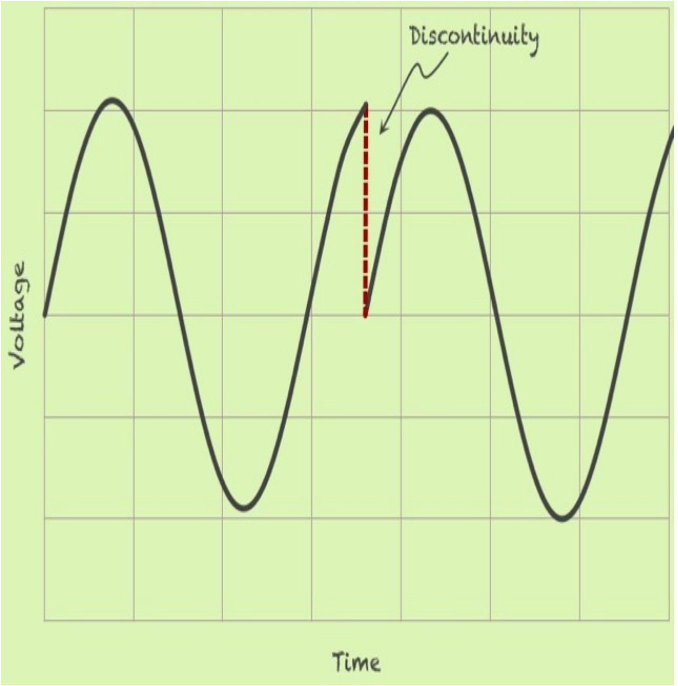
Señal

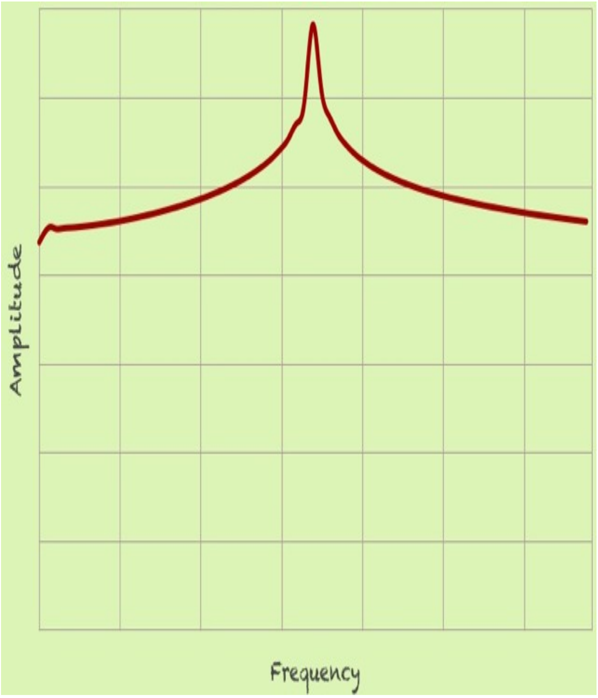
Lo que la Transformada ve

Resultado

Problema #4







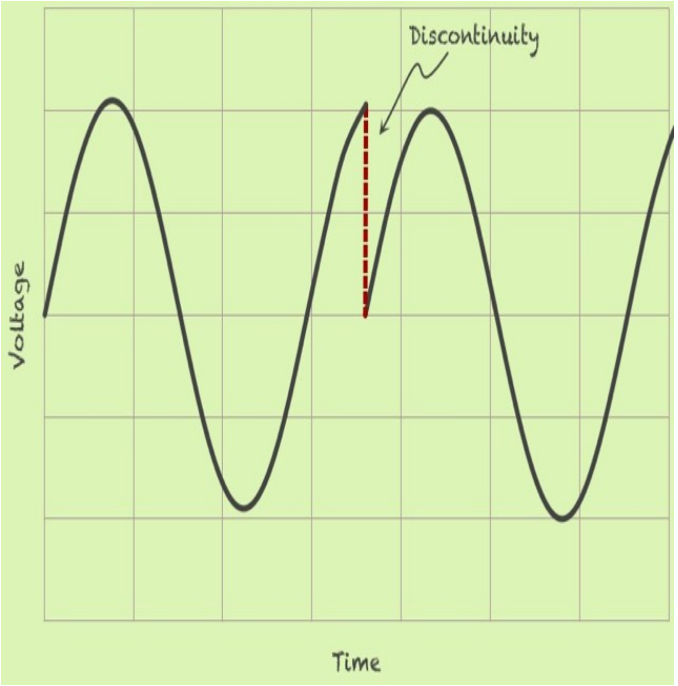
Señal

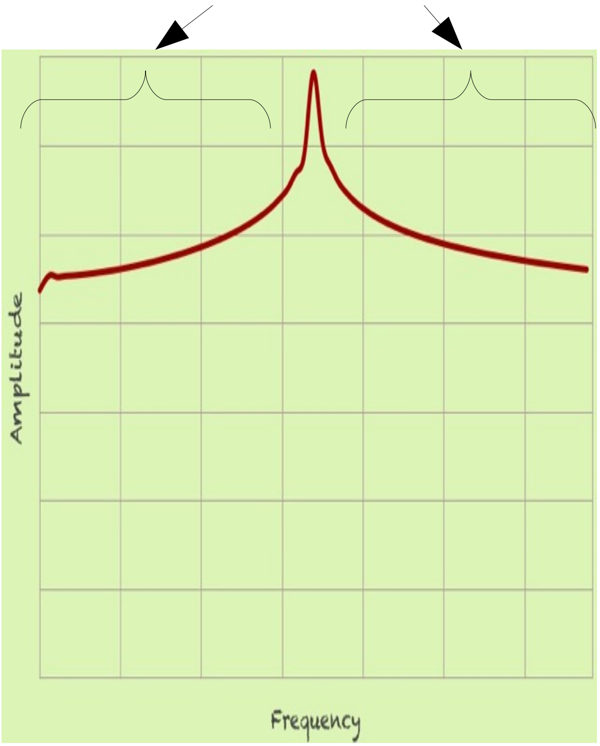
Lo que la Transformada ve

Resultado

Problema #4

Sangrado de Frecuencias
(*Frequency Bleed Over*)





Señal

Lo que la Transformada ve

Resultado

¿Sangrado de Frecuencias?

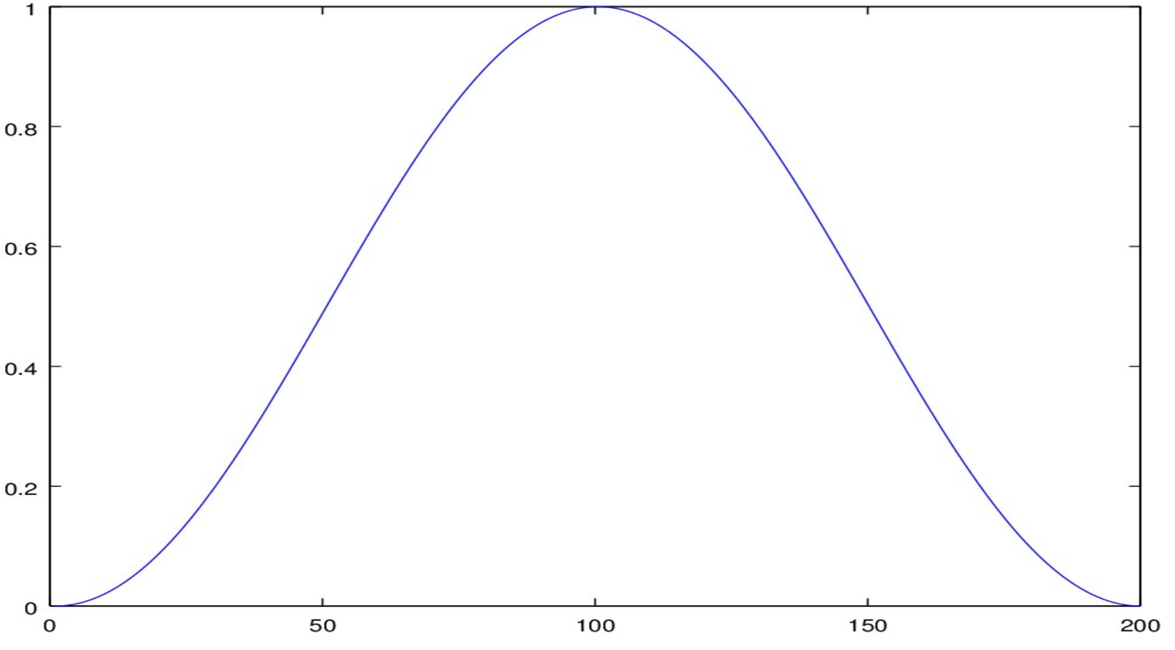
Es la mejor traducción que se me ocurrió a **Frequency Bleed Over**.

- Básicamente, se requiere de la presencia de otras señales periódicas para poder representar discontinuidades.
- Esto no es bueno, porque se insertan frecuencias que no están en nuestra señal original.

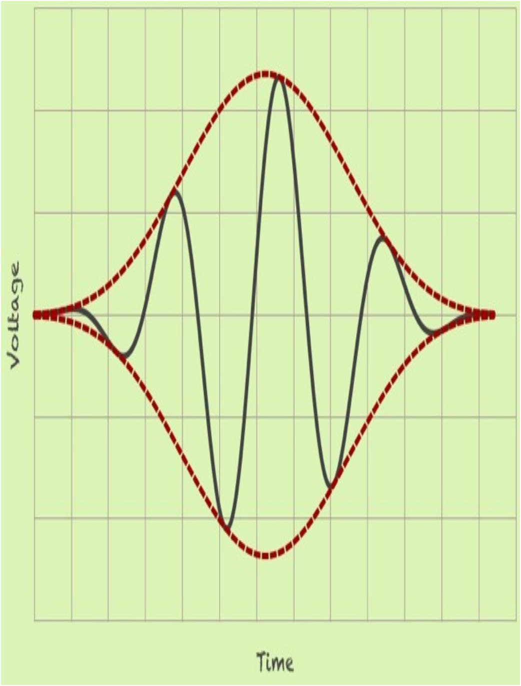
Hann

- Hay varias formas de hacer continuos los puntos iniciales y finales de la señal.
- **Forma Popular:** multiplicando, punto a punto, a la señal por la función Hann.
- En este ejemplo, *T* es 200.

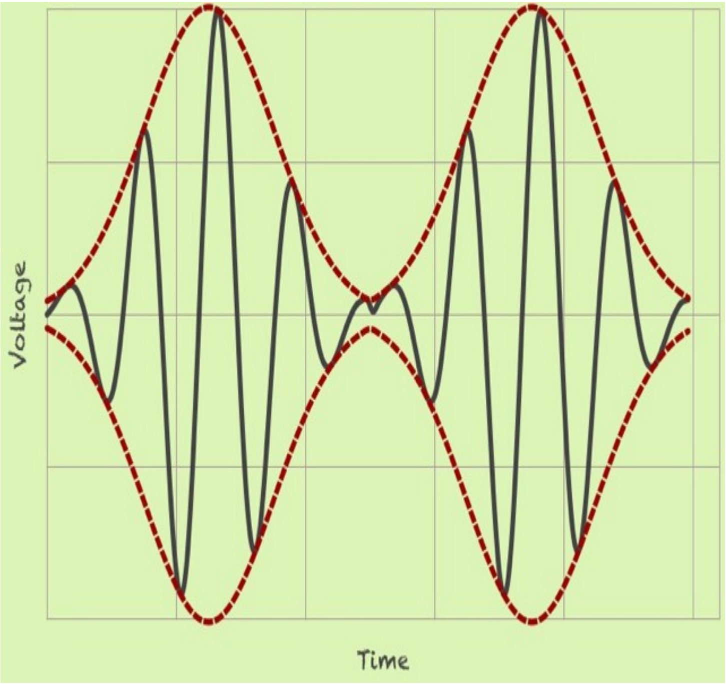
$$w(t) = 0.5\left(1 - \cos\left(\frac{2\pi t}{T-1}\right)\right)$$



Problema #4



Señal

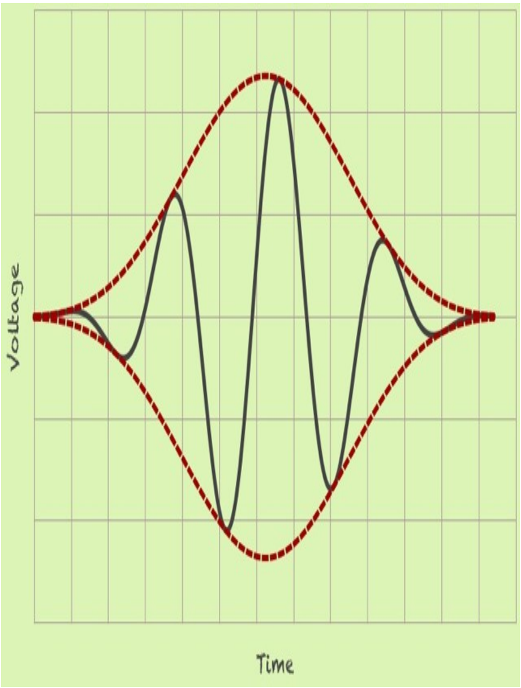


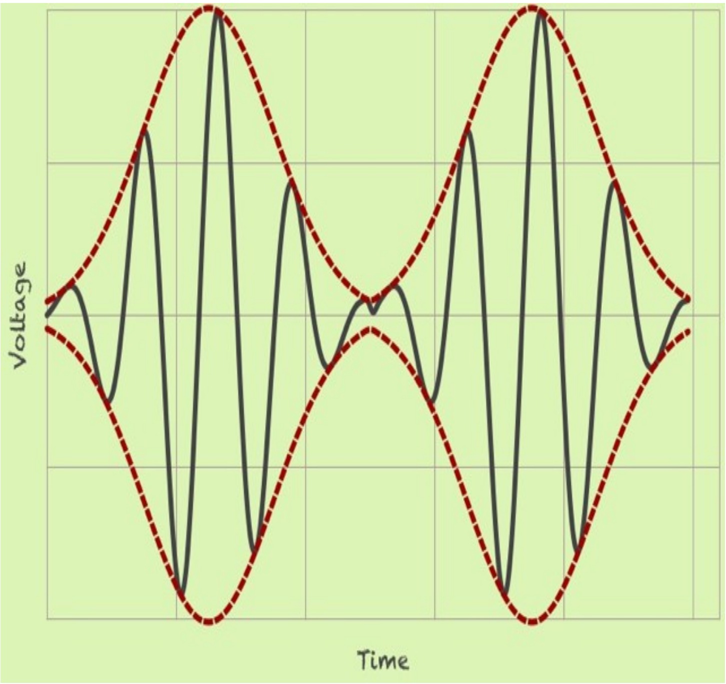
Lo que la Transformada ve

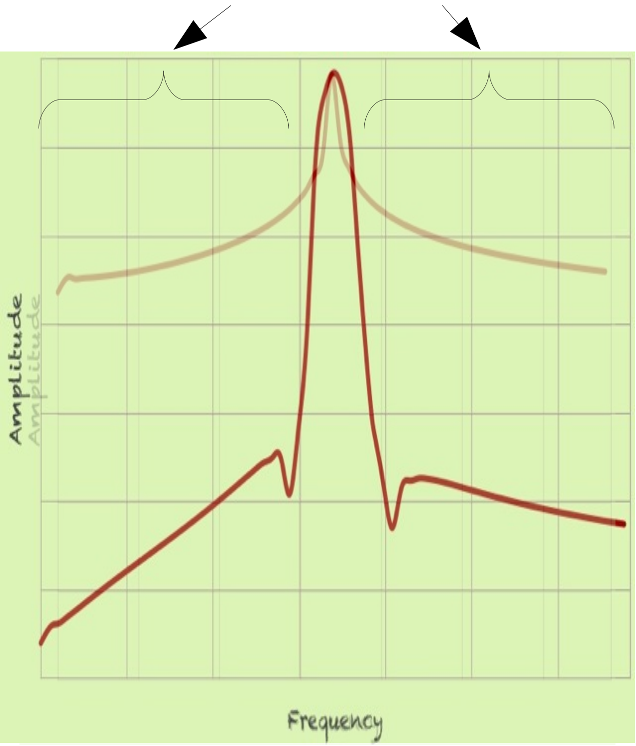
Resultado

Problema #4

El sangrado se minimiza







Señal

Lo que la Transformada ve

Resultado

Problema #5

- Si *T* en la ecuación de la Transformada es el "tiempo final de la señal en el dominio del tiempo":

$$\hat{F}(\omega_n) = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T} f(t)\, e^{-i\omega_n t}$$

- Se necesita de toda la señal para llevar a cabo su transformación.
- ¿Y en tiempo real cómo le hacemos?

Transformada de Tiempo Corto

- En vez de transformar toda la señal, transformamos “trozos” de la señal.
- Estos trozos son conocidos como *ventanas.*
- Se transforman una tras otra, como vayan llegando.
- Así *T* se convierte en el “tiempo final de la ventana”.

Transformada de Tiempo Corto

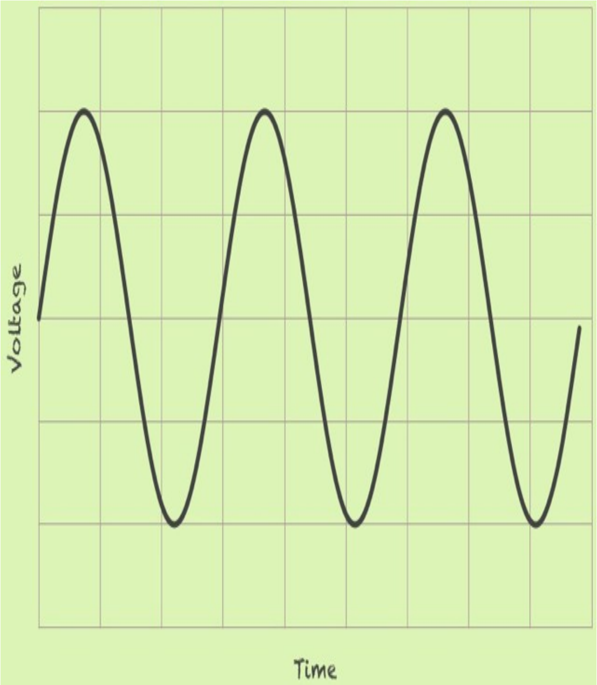
- Uno estaría tentado a solamente partir la señal en dichas ventanas, transformar cada ventana, modificar la ventana en el dominio de la frecuencia, y transforma en inversa.
- Pero, recuerden el Problema #4: tenemos que aparentar como si la señal (o, en este caso, la ventana de la señal) fuera periódica:
  - Hacer que los puntos del tiempo inicial y final no sean discontinuos

Problema #5.5

- Entonces, multiplicamos por Hann cada ventana, la transformamos, la modificamos en frecuencia, y la transformamos de inversa.

¿No?

- El resultado de esto es tener varias ventanas multiplicadas por Hann una tras otra.

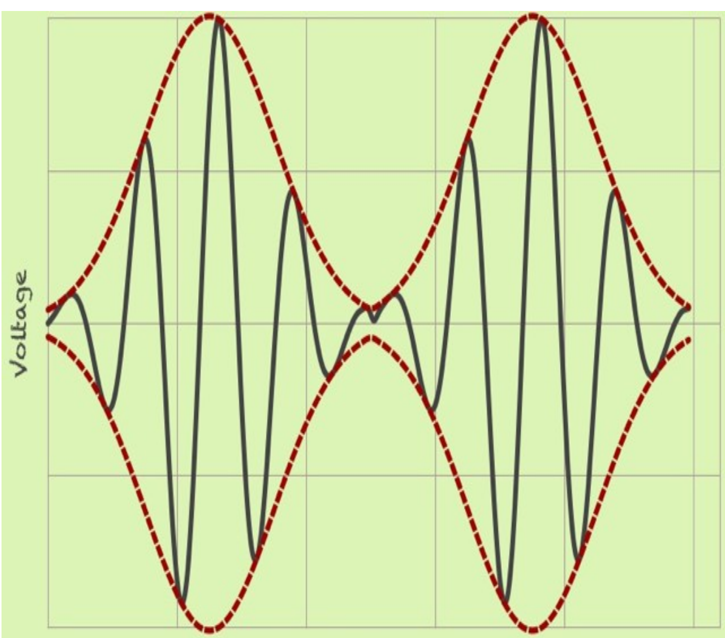


Ventaneo

FFT

Modificación en Frecuencia

IFFT



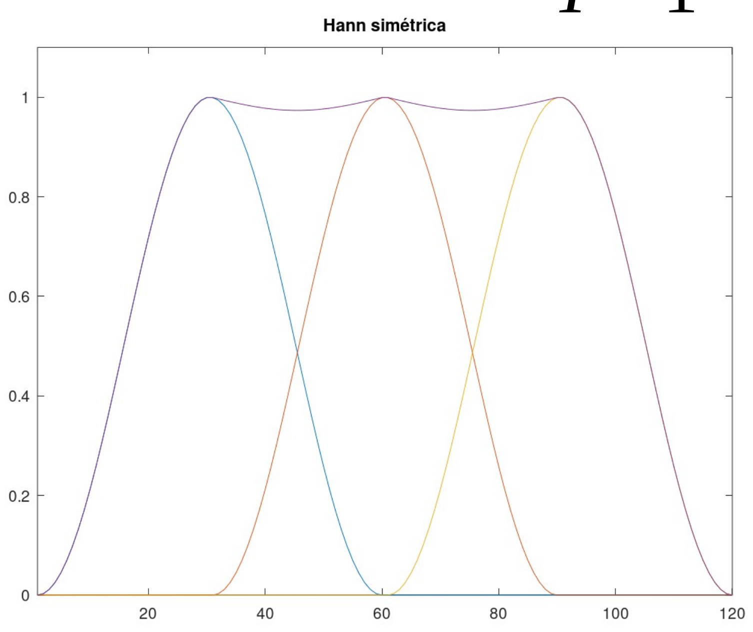
Problema #5.5

- Al hacer esto, tendremos una señal que sube y baja de volumen artificialmente.
- No queremos esto en absoluto, ya que estaríamos metiendo más problemas de los que tenemos.
- Entonces...

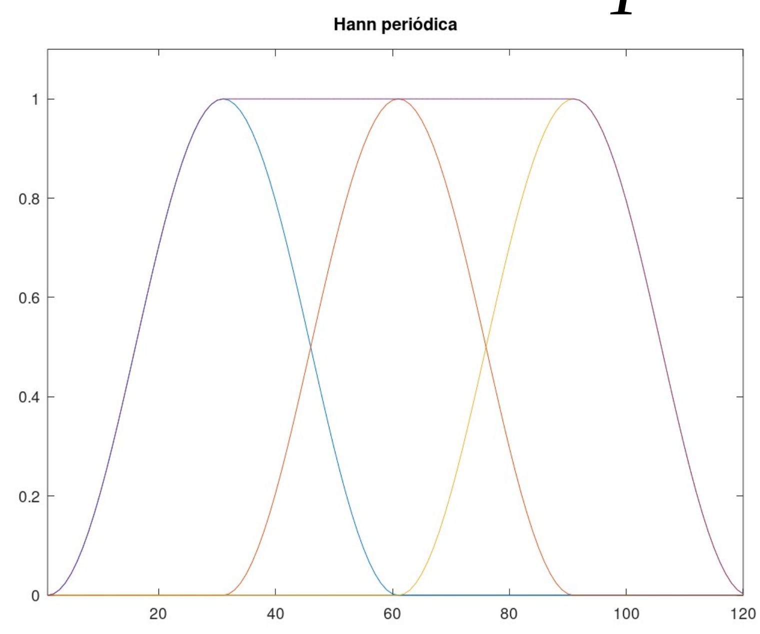
Hann Periódica

- La ventana que vimos anteriormente es conocida como la versión **simétrica** de Hann.
- La versión **periódica** tiene la virtud de que al hacer sobrelape es exactamente igual a 1.

$$w(t)=0.5\left(1-\cos\left(\frac{2\pi t}{T-1}\right)\right)$$

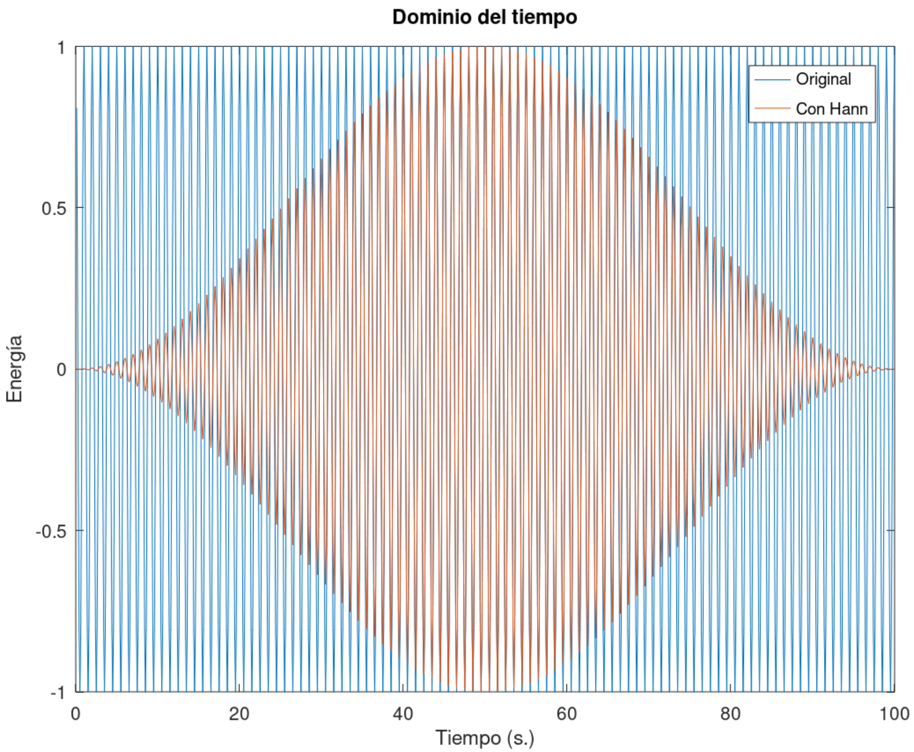


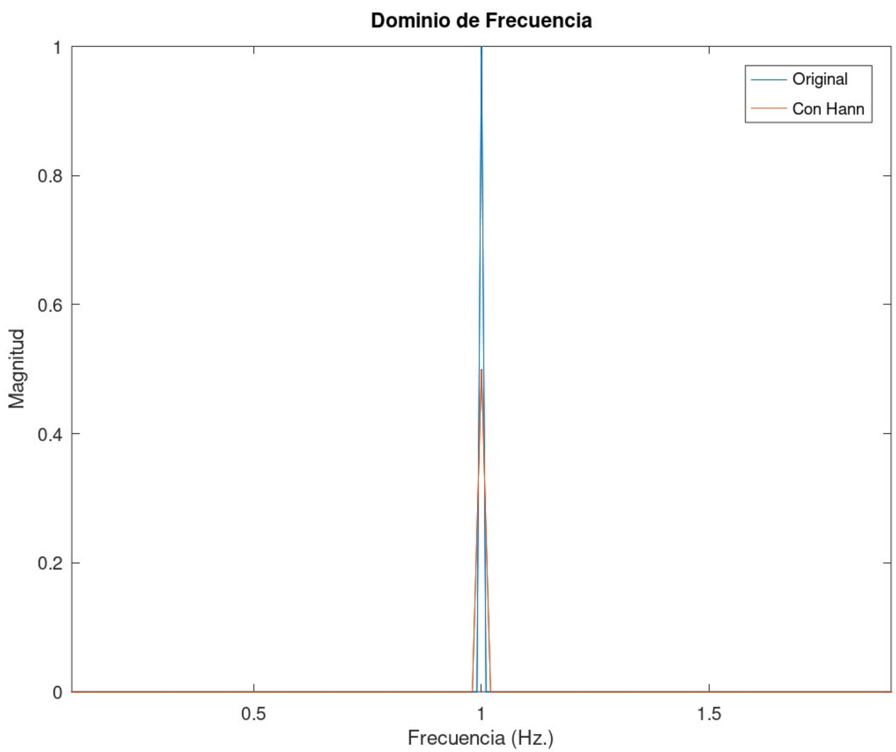
$$w(t)=0.5\left(1-\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\right)$$



Hann Periódica

- También, no “mete” ninguna otra frecuencia.
  - Sólo reduce la magnitud de las frecuencias existentes a la mitad.

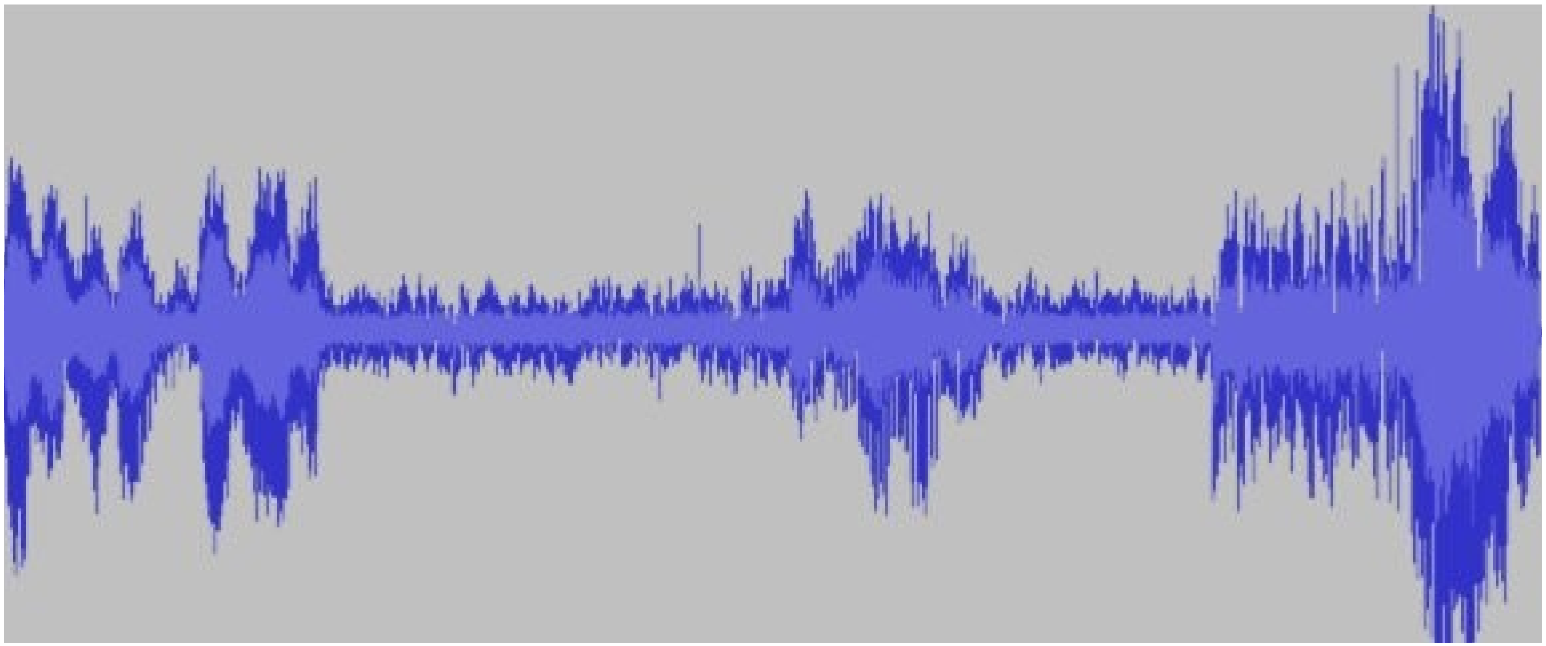




Hann Periódica y Sobrelape

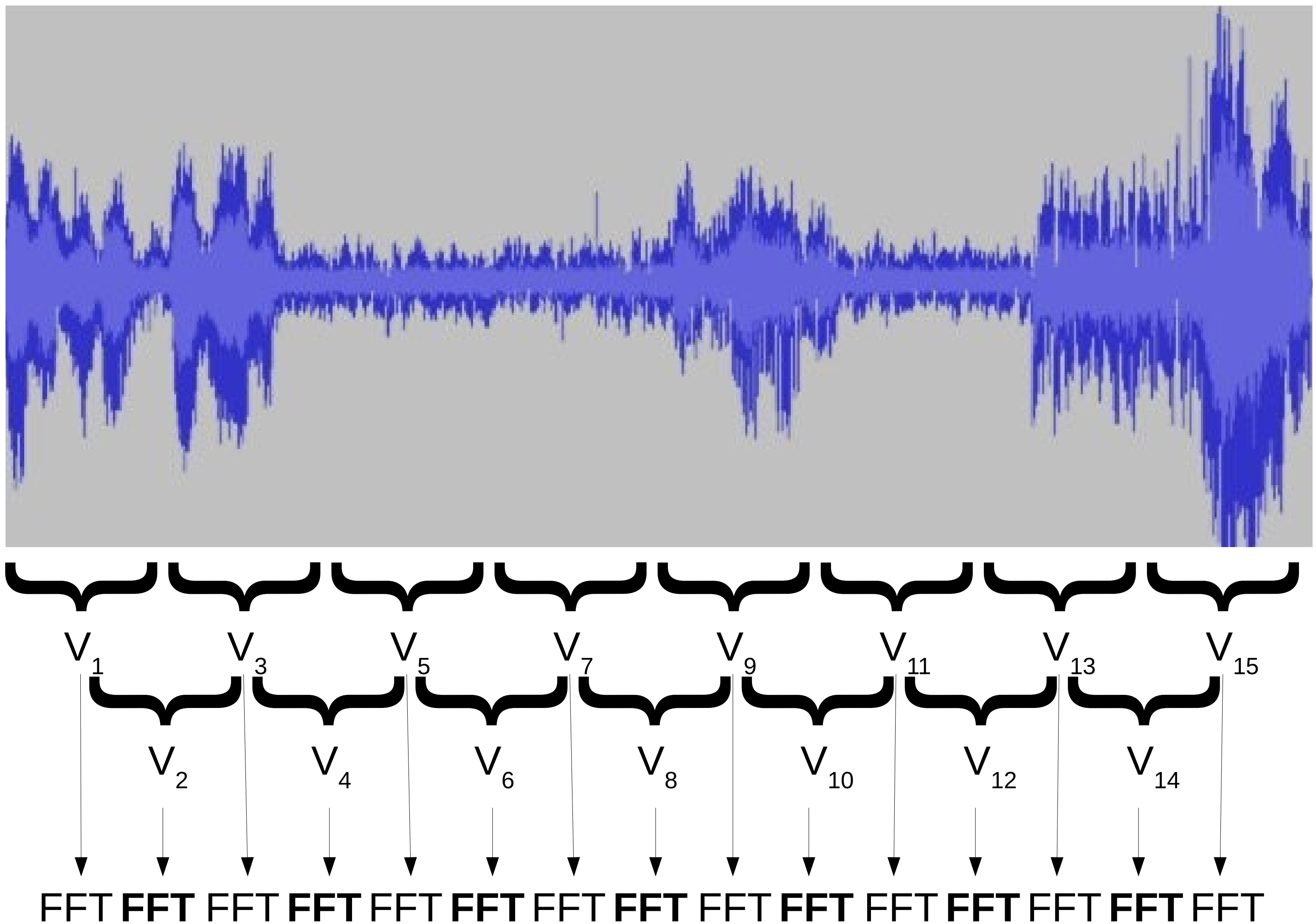
- Estas dos virtudes la hacen ideal para llevar a cabo la solución de **sobrelape y suma** (*overlap-and-add*).
  - Utilizando la suma de mitades de ventanas sobrelapadas como la salida de nuestro sistema.
- Es decir...

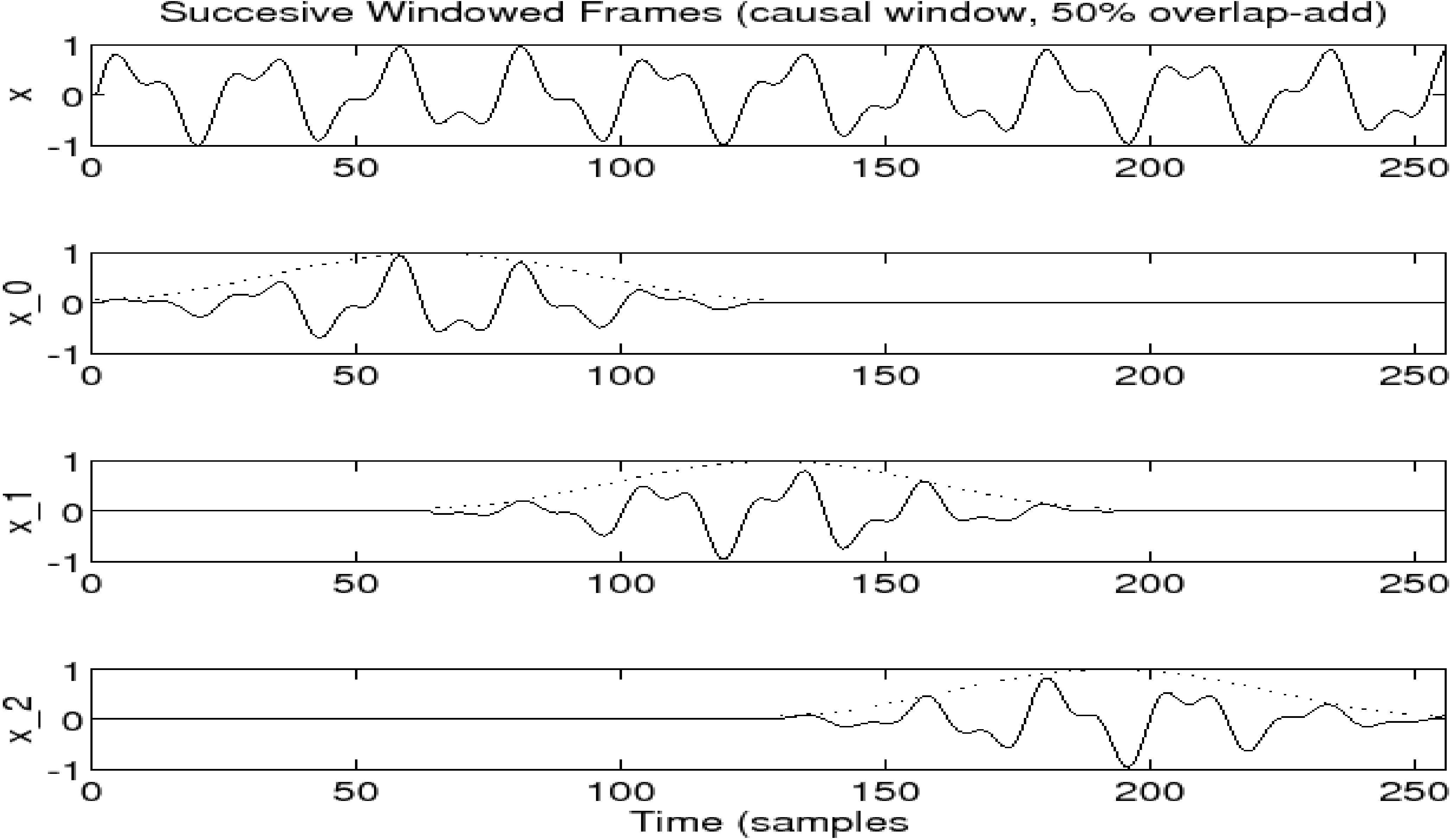
En vez de hacer esto:



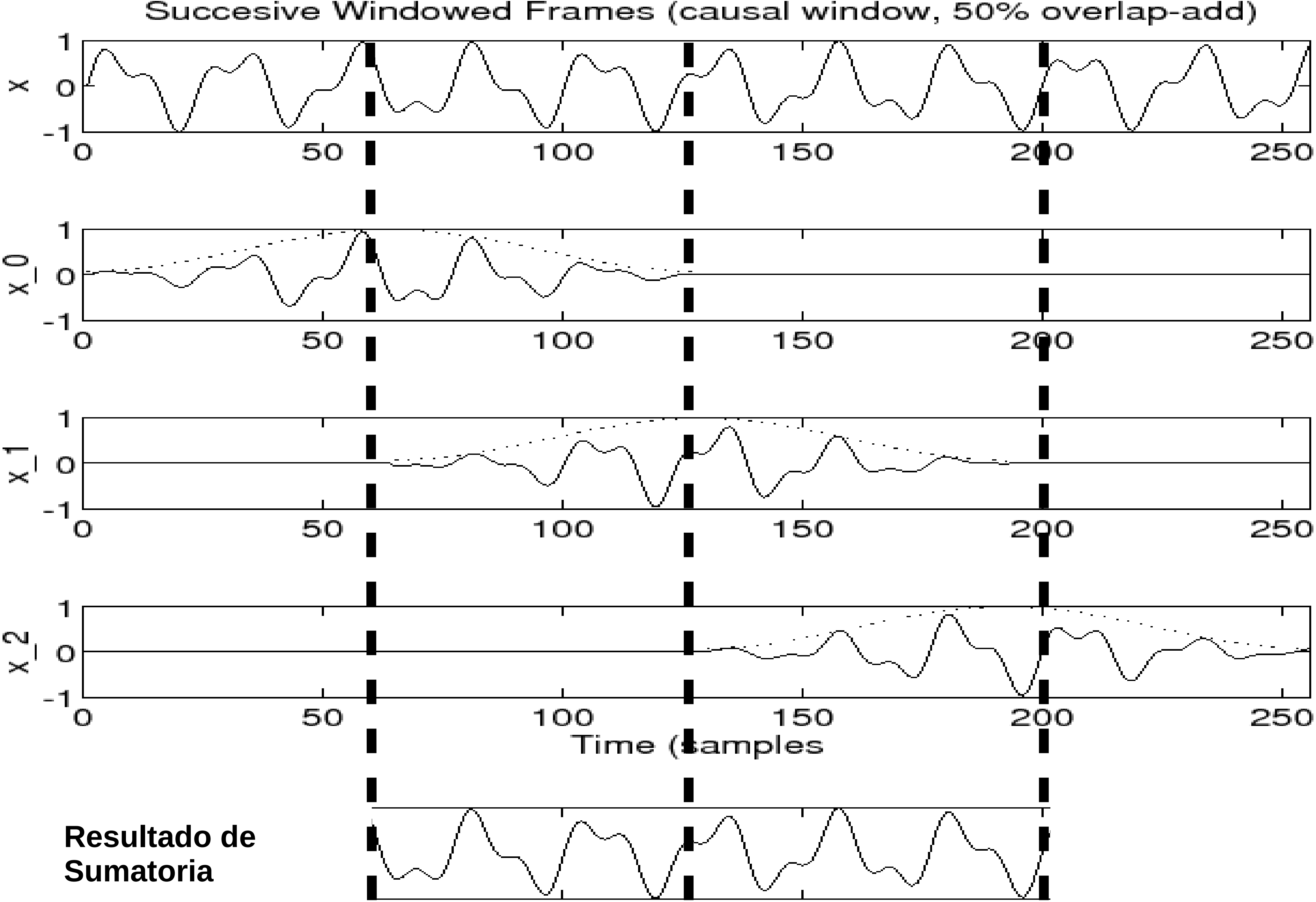
V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7	V_8
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
FFT	FFT	FFT	FFT	FFT	FFT	FFT	FFT

Hacemos esto:





Esto es lo que veíamos en baudline, en la ventana del tiempo.



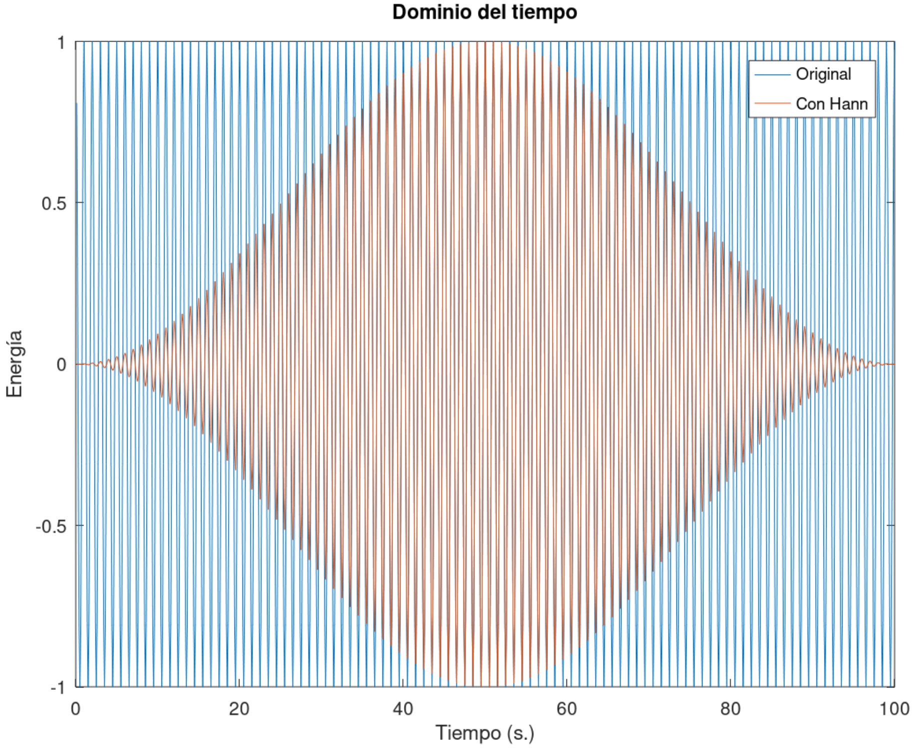
Resultado de Sumatoria

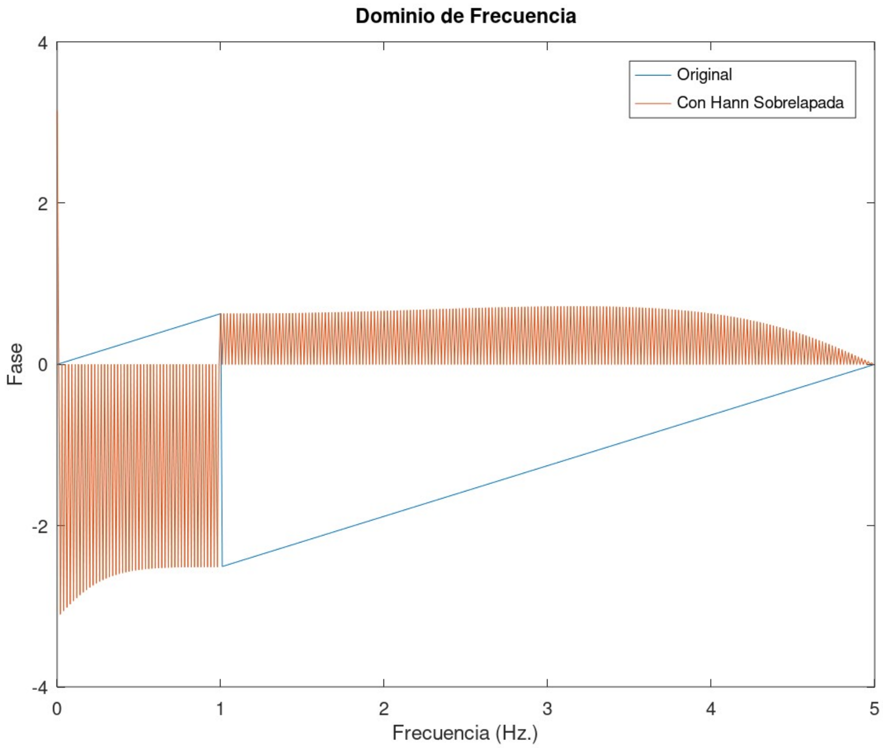
Sobrelape y Suma

- Se puede hacer con otro tipo de funciones como:
  - Función Hamming (con 50% sobrelape)
  - Función Blackman (con 33% sobrelape)
- Todos con sus pros y cons, pero Hann Periódica es una de las funciones más populares para llevarlo a cabo:
  - Llega a cero en sus puntos iniciales y finales
  - No mete frecuencias adicionales
  - Su suma sobrelapada es exactamente igual a 1

Pero...

- Hacer sobrelape con Hann **modifica la fase**.





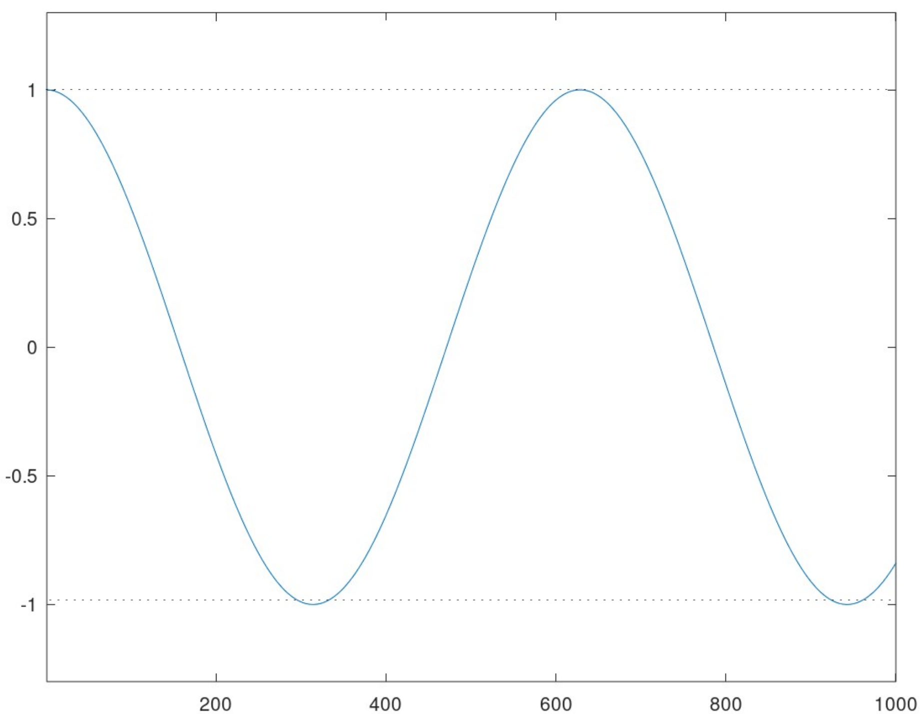
¿Qué podemos hacer?

- ***Al procesar una entrada/micrófono***: la magnitud en el dominio del tiempo es lo único que el usuario va a percibir.
  - No necesitamos hacer nada en este caso.
- ***Al procesar múltiples entradas/micrófonos***: gran parte del trabajo es comparar datos entre señales.
  - Necesitamos modificar todas las señales DE LA MISMA MANERA, para que la fase sea modificada de la misma forma, y así las comparaciones seán válidas.

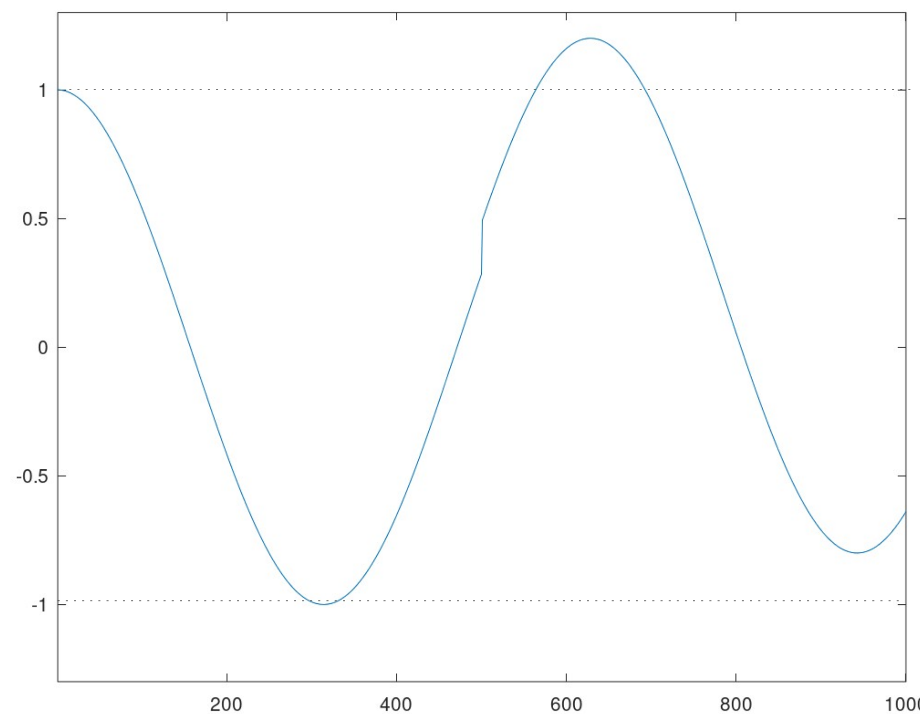
Otro pero...

- Cualquier modificación en el dominio de la frecuencia cambia la energía de la señal.
  - Esto impacta directamente al componente DC.

Normal



DC Offset



¿Cambiamos el DC?

- Es tentador cambiar el DC antes de regresar al dominio del tiempo.
- Pero este valor se calcula con la información del tiempo, no con la información frecuencial.
- Entonces, **no modifiquen el DC**.

- Para evitar el problema del DC offset:

La solución:
Weighted Overlap-and-Add (WOLA)

- Aplicamos dos ventanas, una antes de ir al dominio de la frecuencia (análisis) y otra al regresar al dominio del tiempo (síntesis).
  - La ventana de análisis quita las discontinuidades en el dominio del tiempo para evitar el sangrado de frecuencia.
  - La ventana de síntesis quita las discontinuidades entre ventanas al regresar al domino del tiempo.

Requisito

- Ambas ventanas, en conjunto, tienen que satisfacer la siguiente condición para que WOLA sea equivalente al *overlap-and-add* normal:

$$y(n) = x(n) \sum_t w(t) v(t)$$

$$\sum_t w(t) v(t) = 1$$

w: ventana de análisis antes de ir al dominio de la frecuencia
v: ventana de síntesis después de regresar al dominio del tiempo
x: la entrada de sobrelape-y-suma
y: la salida de sobrelape-y-suma
t: índice de tiempo en las ventanas
n: índice de tiempo en las señales de entrada y salida

Selección de Ventanas de Análisis y de Síntesis

- Popularmente, se utiliza la raíz cuadrada de la ventana de Hann Periódica para ambas la ventana de análisis y de síntesis :

$$w(t)=v(t)=\sqrt{0.5\left(1-\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\right)}$$

- De esta manera, aplicar ambas ventanas en conjunto es equivalente a aplicar una ventana de Hann Periódica.

Selección de Ventanas de Análisis y de Síntesis

- Se pueden utilizar otras ventanas, con su pros y contras. Y aún si no cumplen con el requisito de singularidad, se puede forzar que se cumpla compensando la salida con:

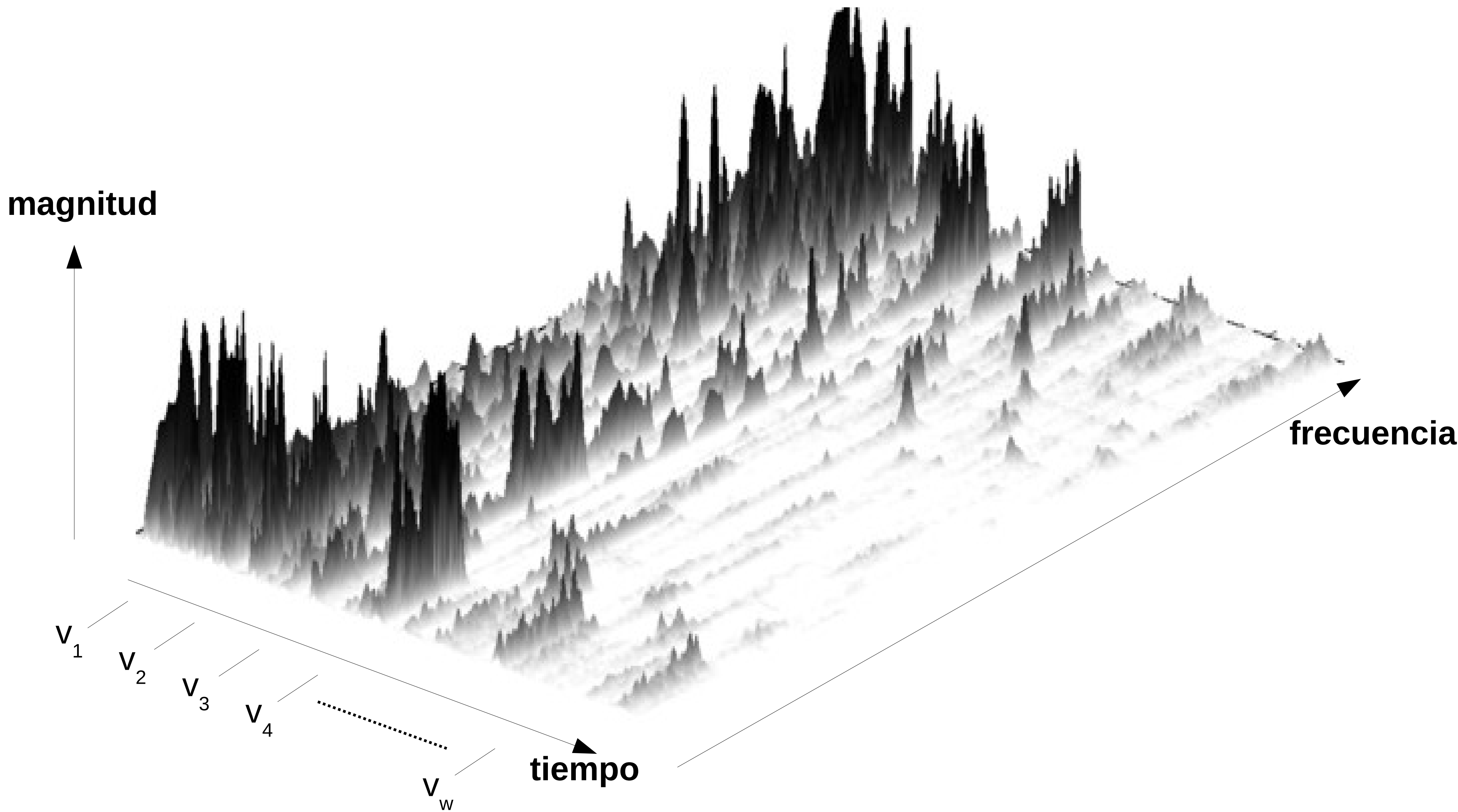
$$y(n) \leftarrow y(n)\frac{T/2}{\sum_t w(t)v(t)}$$

- Pero esto no es necesario con la raíz cuadrada de Hann Periódica.

Independientemente, el resultado de la Transformada de Tiempo Corto de Fourier es:

Una serie de ventanas de **tiempo** transformadas al dominio de **frecuencia**.

Espectrograma



Ahora,

¿cómo programamos todo esto?

Siguiente Tema:

La Biblioteca FFTW3
“Fastest Fourier Transform in the West”