Estimación de *Múltiples* Direcciones de Arribo

(Multi-DOA)

Preámbulo

- Este tema involucra conceptos profundos, que normalmente se ven en materias como:
  - Algebra lineal
  - Estadística
- Vamos a darle una revisada justamente suficiente para que puedan desarrollar estas técnicas de Multi-DOA en JACK, no más.

Preámbulo

- Por lo tanto, no voy a profundizar en las bases que involucran estas técnicas.
  - Esto no es un estudio extensivo de las bases.
- Les recomiendo darle una revisada a estos conceptos ya sea:
  - Por asesoría
  - Por lectura independiente

Técnicas de Multi-DOA

- “Parches” con Correlación Cruzada.
- MUltiple SIgnal Classification (MUSIC).
- Basado en Beamforming.

Técnica:

“Parches” con Correlación Cruzada

Correlación Cruzada

- ¿Que no dijimos que era para una sóla fuente?
  - Sí, pero podemos hacer un poco de trampa.

Correlación Cruzada

- Para visualizar esta “trampa”, descarguen al mismo directorio:
  - multigcc.m
  - add_reverb.m
- Antes de correr octave, cambien de directorio a donde los descargaron.
  - Un archivo con terminación “.m” se convierten en un comando/función disponible para octave.
  - El script multigcc manda a llamar la función add_reverb.
- Corran octave, y luego corran multigcc dentro de octave.

multigcc

- Este script crea dos señales de origen.
  - Simulando las señales que emitieron las fuentes.
  - Se llaman “s1” y “s2”.
- Después, desfaza cada señal de origen, les mete ruido y reverberación, y las suma.
  - Así simula las señales capturadas por los micrófonos.
  - Se llaman “x” y “y”.
- Al final, calcula el CCV con Pearson y con GCC-PHAT, de forma de comparar ambas técnicas.

multigcc

- También, crea tres figuras:
  - Figura 1: muestra las señales “x” y “y”.
  - Figura 2: el CCV basado en Pearson.
  - Figura 3: el CCV basado en GCC-PHAT.
- Si quieren ver otras señales, pueden crear otra figura con:
  - figure()
  - Y luego mandar a llamar la función plot.

multigcc

- Es posible modificar a multigcc por medio de abrir el archivo multigcc.m (es un archivo de texto).
- Así pueden cambiar el valor de:

  noise_w: qué tanto ruido (0: nada, 1: mucho)

  reverb_w: qué tanta reverberación (0: nada, 1: mucho)
- Recuerden volver a correr multigcc dentro de octave al hacer cualquier cambio.

multigcc

- Prueben con:

  noise_w = 0

  reverb_w = 0

- ¿Que ven en las Figuras 2 y 3?

multigcc

- Prueben con:

  noise_w = 0

  reverb_w = 0

- ¿Que ven en las Figuras 2 y 3?

- Con Pearson: aparecen picos adicionales y son más anchos.
- Con GCC-PHAT: los picos son más angostos, pero no están tan presentes.

multigcc

- Prueben con:

  noise_w = 0

  reverb_w = 0.35

- ¿Que ven en las Figuras 1, 2 y 3?

multigcc

- Prueben con:

  noise_w = 0

  reverb_w = 0.35
- ¿Que ven en las Figuras 1, 2 y 3?

- Las señales “capturadas” están mas gordas.
- Con Pearson: un pico casi desaparece.
- Con GCC-PHAT: los picos siguen presentes, aunque aparecen otros, pero ninguno más grande que los dos picos que andamos buscando.

multigcc

- Prueben con:

  noise_w = 0.35

  reverb_w = 0

- ¿Que ven en las Figuras 1, 2 y 3?

multigcc

- Prueben con:

  noise_w = 0.35

  reverb_w = 0
- ¿Que ven en las Figuras 1, 2 y 3?

- Las señales “capturadas” están algo ruidosas.
- Con Pearson: casi no hay diferencia como cuando lo corrimos sin ruido y sin reverberación.
- Con GCC-PHAT: el pico más pronunciado ya está mas pequeño, el otro pico de interés se ha desparacido y una GRAN cantidad de más picos salieron.

Conclusiones de multigcc

- Cada técnica tiene un pico “preferido” diferente al otro.
  - Observen las señales de origen “s1” y “s2”.
    - Una es más ancha que la otra.

Conclusiones de multigcc

- Pearson calcula la correlación basada en el producto punto, que está relacionada con la cantidad de la área bajo la curva que ambas señales comparten.
  - Por lo tanto, prefiere picos coincidentes anchos.
- GCC-PHAT, por quitar la magnitud en el dominio de la frecuencia, le pone más atención a los cambios fuertes (positivos y negativos) que ocurren a la vez en ambas señales.
  - Por lo tanto, prefiere picos coincidentes angostos.

Conclusiones de multigcc

- Pearson es más robusto ante el ruido que GCC-PHAT.
  - De nuevo, GCC-PHAT es más sensible a cambios en unísono, aun cuando son pequeños.
  - Estas correlaciones “pequeñas” son los picos que el ruido produce.
  - Corranlo de nuevo y verán que los picos de GCC-PHAT cambia cada vez.
    - El ruido es creado con números al azar.
    - Esto no ocurre con Pearson.

Conclusiones de multigcc

- GCC-PHAT es más robusto ante la reverberación que Pearson.
  - Resultado de haber quitado la magnitud en el dominio de la frecuencia.
    - Mientras que ambas señales hayan sido afectadas por la misma reverberación, los cambios fuertes serán iguales en ambas señales.
  - El área conjunta bajo la señal cambia, y si una señal es “tapada”, Pearson no la va a “ver”.

¿Entonces, cual es la trampa?

- Suponiendo que:
  - No hay mucho ruido.
  - No hay mucha reverberación.
- Podemos escoger los picos más altos y presentarlos como los desfases de las señales.

Trampa

- Pero, ¿cómo sabemos cuantos picos escoger?
  - Podemos suponer saberlo.
- Si no, otra forma de escogerlos es presentar todos los picos que estén arriba de un cierto umbral de correlación.

Trampa

- Aún así, habrán veces que ciertos picos no tengan un valor mayor al umbral, y se perderían.
- Podemos ir “acumulando” los picos, y sólo presentar los resultados tras una cierta cantidad de ventanas de tiempo.
- Los picos con alta correlación que hayan aparecido más veces son los que presentamos.

Trampa

- Pero, ¿tras cuántas ventanas presentamos los resultados?
- Y, ¿cuantas veces que hayan aparecido un pico lo consideramos para que lo presentemos como resultado?
- Como dije: es trampa, y no es una solución limpia.
  - Pero tiene sus usos.

Técnica:

MUltiple SIgnal Classification (MUSIC)

MUSIC

- Desarrollado por Ralph Schmidt en 1986:
  - Schmidt, R.O, "Multiple Emitter Location and Signal Parameter Estimation," IEEE Trans. Antennas Propagation, Vol. AP-34 (March 1986), pp.276-280.
  - Lo pueden descargar de la página del curso.
- Y la explicación de este método requiere de varios conceptos siendo explicados primero.

Conceptos Necesarios para MUSIC

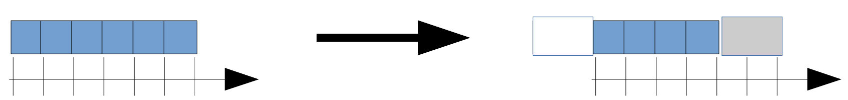
- Desfase por medio de exponencial de números imaginarios.
  - También conocido como *direction vector*.
- Eigenvectores y eigenvalores.
- Matriz de Covariancia.

¿Listos?

Desfase por Medio de Exponencial Imaginaria

Desfase por Medio de Exponencial Imaginaria

- Hasta ahorita, hemos desfasado las señales de una manera bastante artificial:
  - Quitando muestras de un lado de la señal, y agregamos ceros.



Desfase por Medio de Exponencial Imaginaria

- Otra forma de desfasar, es por medio de multiplicar la señal transformadaa Fourier por una exponencial:

$$g(t-T)=F^{-1}\left(G(t)e^{-i2\pi fT}\right)$$

Donde:

g: señal que vamos a desfasar
G: transformada de Fourier de la señal g
T: tiempo en segundos por la que vamos a desfasar la señal
f: la frecuencia que vamos a desfasar

Desfase por Medio de Exponencial Imaginaria

- Otra forma de desfasar, es por medio de multiplicar la señal transformadaa Fourier por una exponencial:

$$g(t-T)=F^{-1}\left(G(t)e^{-i2\pi \boldsymbol{f} T}\right)$$

Donde:

g: señal que vamos a desfasar
G: transformada de Fourier de la señal g
T: tiempo en segundos por la que vamos a desfasar la señal
f: la frecuencia que vamos a desfasar

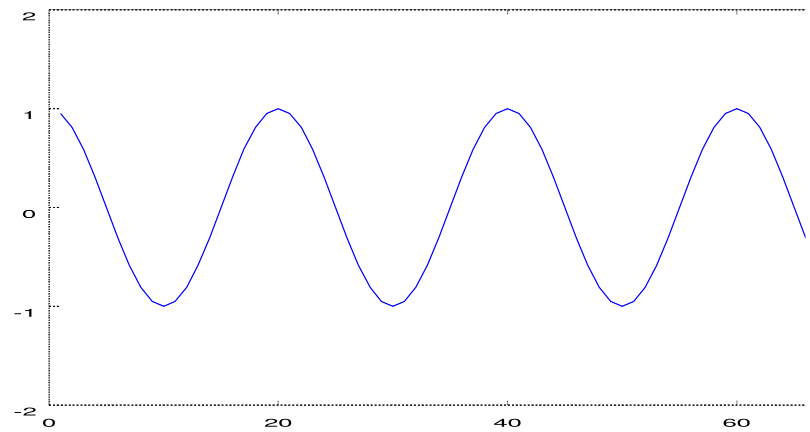
¿Frecuencia?

- Estamos desfasando, algo que sucede en el tiempo. ¿Como es que una frecuencia está involucrada?
- Esta *transformación* realmente sólo desfasa los datos de la señal que pertenecen a dicha frecuencia.
- Por lo que si queremos desfasar a TODA la señal, tenemos que aplicar esta transformación a **todas** sus frecuencias.

Señales Utilizadas para Ejemplos

- Para efectos de este tema, vamos a asumir que las señales que estamos manejando son **señales de frecuencia única**.

$$g(t)=e^{-i2\pi ft}$$

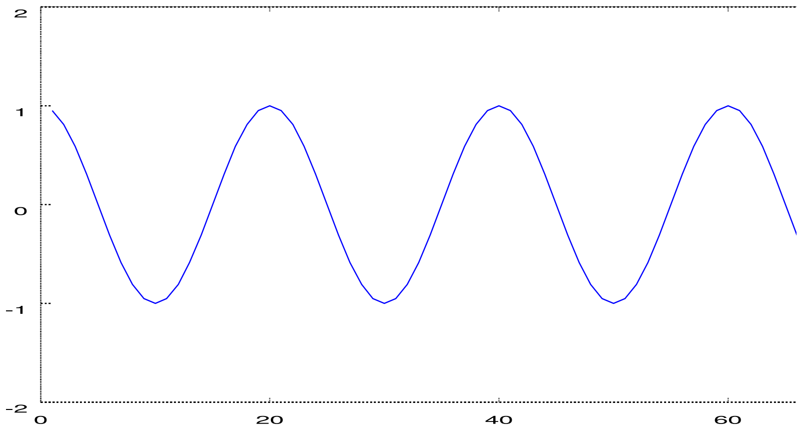


- Así se puede aplicar el desfase directamente multiplicando por la exponencial sin necesidad de convertir al dominio de Fourier.
  - Para rapidez/sencillez del ejemplo

Señales Utilizadas para Ejemplos

- Claro está, tenemos que estar manejando *tiempo complejo.*
- Y tenemos que en algún momento **generalizar esto a todas las frecuencias**.
  - Pero, comencemos sencillo.

$$g(t)=e^{-i2\pi ft}$$



Espera...

- La ecuación de una señal con frecuencia única, y la de la transformación de desfase, son muy parecidas.

$$g(t-T)=F^{-1}\left(G(t)e^{-i2\pi fT}\right) \qquad g(t)=e^{-i2\pi ft}$$

- Sí. Y de ahí radica la posibilidad de hacer el desfase de una manera tan sencilla.

Propiedades de este Desfase

Ciclicidad.

- Por estar aplicando una onda senoidal, el desfase es *cíclico.*
- Dícese: los valores que están al final, que normalmente tacharíamos como “inválidas”, son puestos al principio.

Propiedades de este Desfase

Bidireccionalidad.

- El signo del término T indica el tipo de desfase:
  - Si $T > 0$: desfase positivo.
  - Si $T < 0$: desfase negativo.

¿Para qué tanto lio?

- Estábamos desfasando las señales de una manera sencilla.
- ¿Para qué complicarnos la vida?

- Porque así podemos insertar el acto de desfase directamente en una ecuación matemática...

Modelo de las Señales Capturadas

- Por la forma en que funcionan el producto entre dos matrices, se puede hacer lo siguiente:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} e^{-i2\pi f T_{1:1}} & e^{-i2\pi f T_{1:2}} & \cdots & e^{-i2\pi f T_{1:M}} \\ e^{-i2\pi f T_{2:1}} & e^{-i2\pi f T_{2:2}} & \cdots & e^{-i2\pi f T_{2:M}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{-i2\pi f T_{D:1}} & e^{-i2\pi f T_{D:2}} & \cdots & e^{-i2\pi f T_{D:M}} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{S}=\begin{bmatrix} s_1(1) & s_1(2) & \cdots & s_1(N) \\ s_2(1) & s_2(2) & \cdots & s_2(N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_M(1) & s_M(2) & \cdots & s_M(N) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{S}\,\boldsymbol{A}$$

Donde:

s_x: es una señal de origen

N: tamaño de la señal (o de la ventana de la señal)

$T_{d:m}$: es el retraso recibido de la señal s_m en el micrófono d

A: es la matriz que contiene los vectores de dirección (*direction vectors*)

X: son las señales capturadas (en los micrófonos); cada renglón representa un micrófono

Modelo de las Señales Capturadas

- Por la forma en que funcionan el producto entre dos matrices, se puede hacer lo siguiente:

$$A = \begin{bmatrix} e^{-i2\pi f T_{1:1}} & e^{-i2\pi f T_{1:2}} & \cdots & e^{-i2\pi f T_{1:M}} \\ e^{-i2\pi f T_{2:1}} & e^{-i2\pi f T_{2:2}} & \cdots & e^{-i2\pi f T_{2:M}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{-i2\pi f T_{D:1}} & e^{-i2\pi f T_{D:2}} & \cdots & e^{-i2\pi f T_{D:M}} \end{bmatrix} \qquad S = \begin{bmatrix} s_1(1) & s_1(2) & \cdots & s_1(N) \\ s_2(1) & s_2(2) & \cdots & s_2(N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_M(1) & s_M(2) & \cdots & s_M(N) \end{bmatrix}$$

$$X = S\,A$$

Lo que nos interesa estimar.

Donde:

s_x: es una señal de origen

N: tamaño de la señal (o de la ventana de la señal)

$T_{d:m}$: es el retraso recibido de la señal s_m en el micrófono d

A: es la matriz que contiene los vectores de dirección (*direction vectors*)

X: son las señales capturadas (en los micrófonos); cada renglón representa un micrófono

Direction Vector

- Enlista los desfases que sufre la señal de origen en cada micrófono.
- Se establece algún micrófono como “referencia” del cual se calculan los desfases relativos.
  - Normalmente es el primer micrófono.
- El direction vector para una señal, para una frecuencia, con D micrófonos:

$$\boldsymbol{A}_{\mathbf{1}:f_1}=\begin{bmatrix} 1 \\ e^{-i2\pi f_1 T_{2:1}} \\ e^{-i2\pi f_1 T_{3:1}} \\ \vdots \\ e^{-i2\pi f_1 T_{D:1}} \end{bmatrix}$$

Cálculo de Desfases para un Direction Vector

- Se asume que se conoce su dirección de arribo.
- Para encontrar el desfase que sufre del micrófono de diferencia, se puede utilizar el inverso del modelo del campo lejano:

$$t = d \sin(\theta) / V_{sound}$$

t: desfase entre micrófonos de la señal de interés

d: distancia entre micrófonos

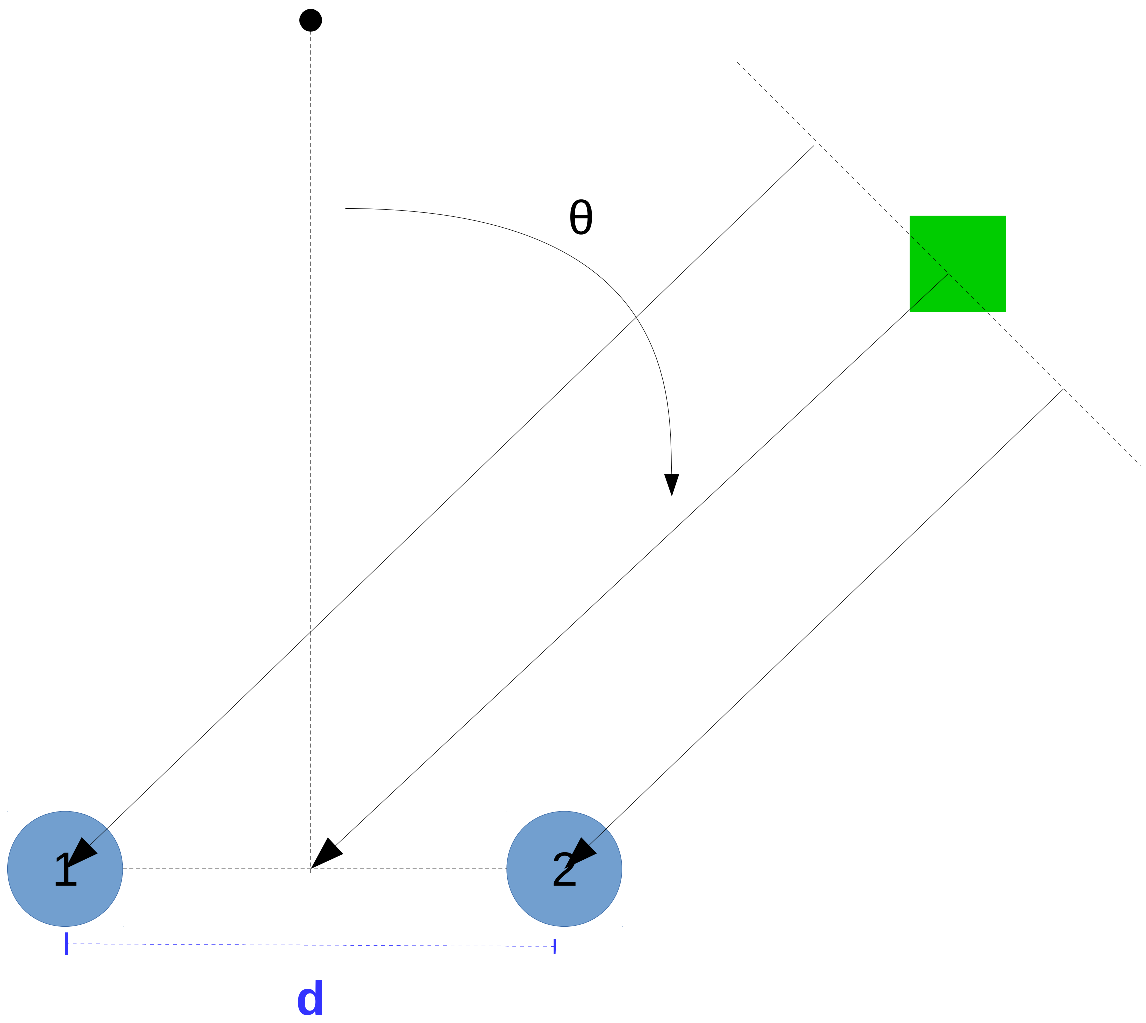
V_{sound}: velocidad del sonido

θ: dirección de arribo de la señal

- ¿Cómo se mide el ángulo?

Para dos micrófonos

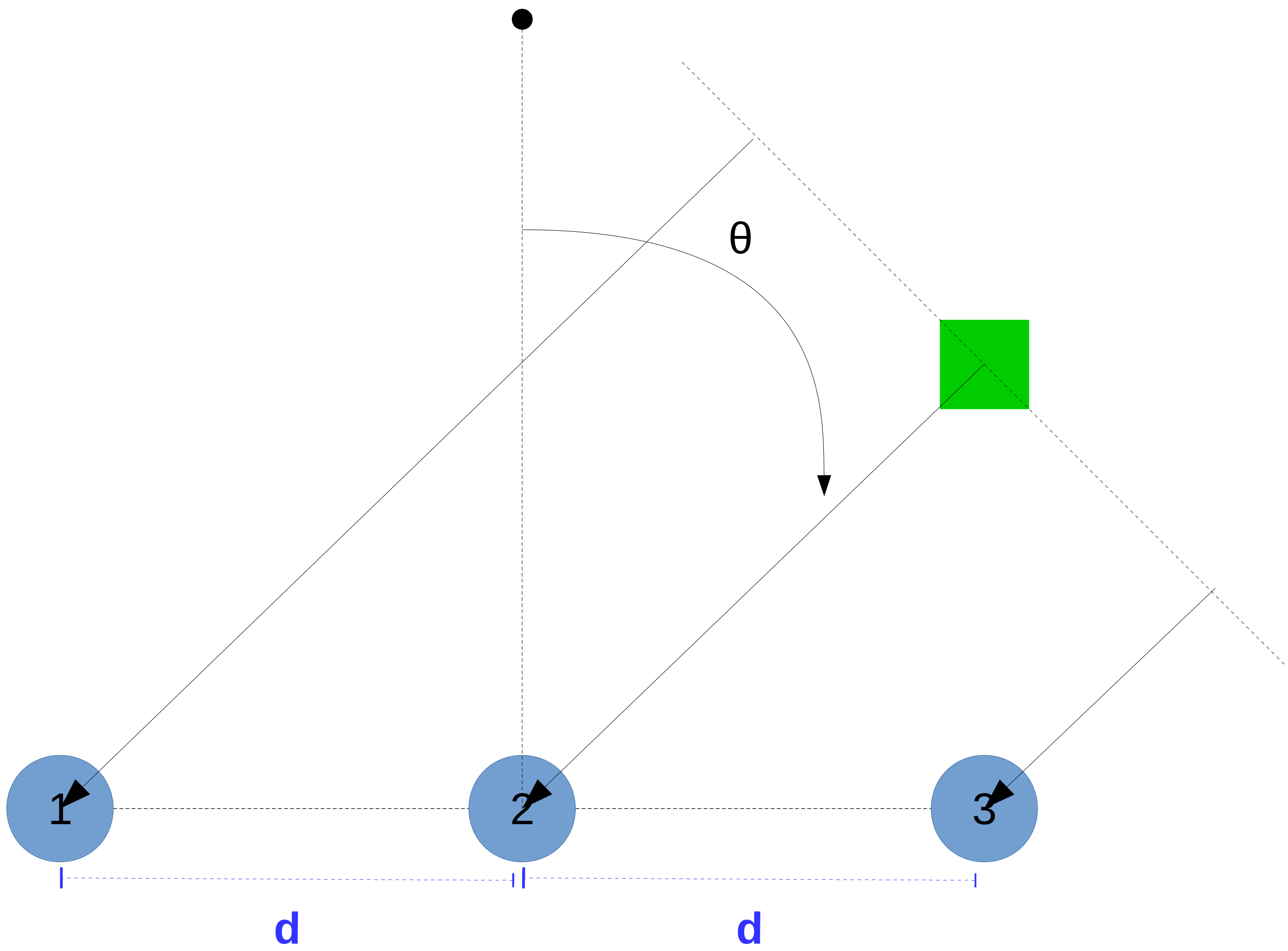
$$t_{2-1} = \frac{\sin(\theta) d}{V_{sound}}$$



Para tres micrófonos

$$t_{2-1} = \frac{\sin(\theta) d}{V_{sound}}$$

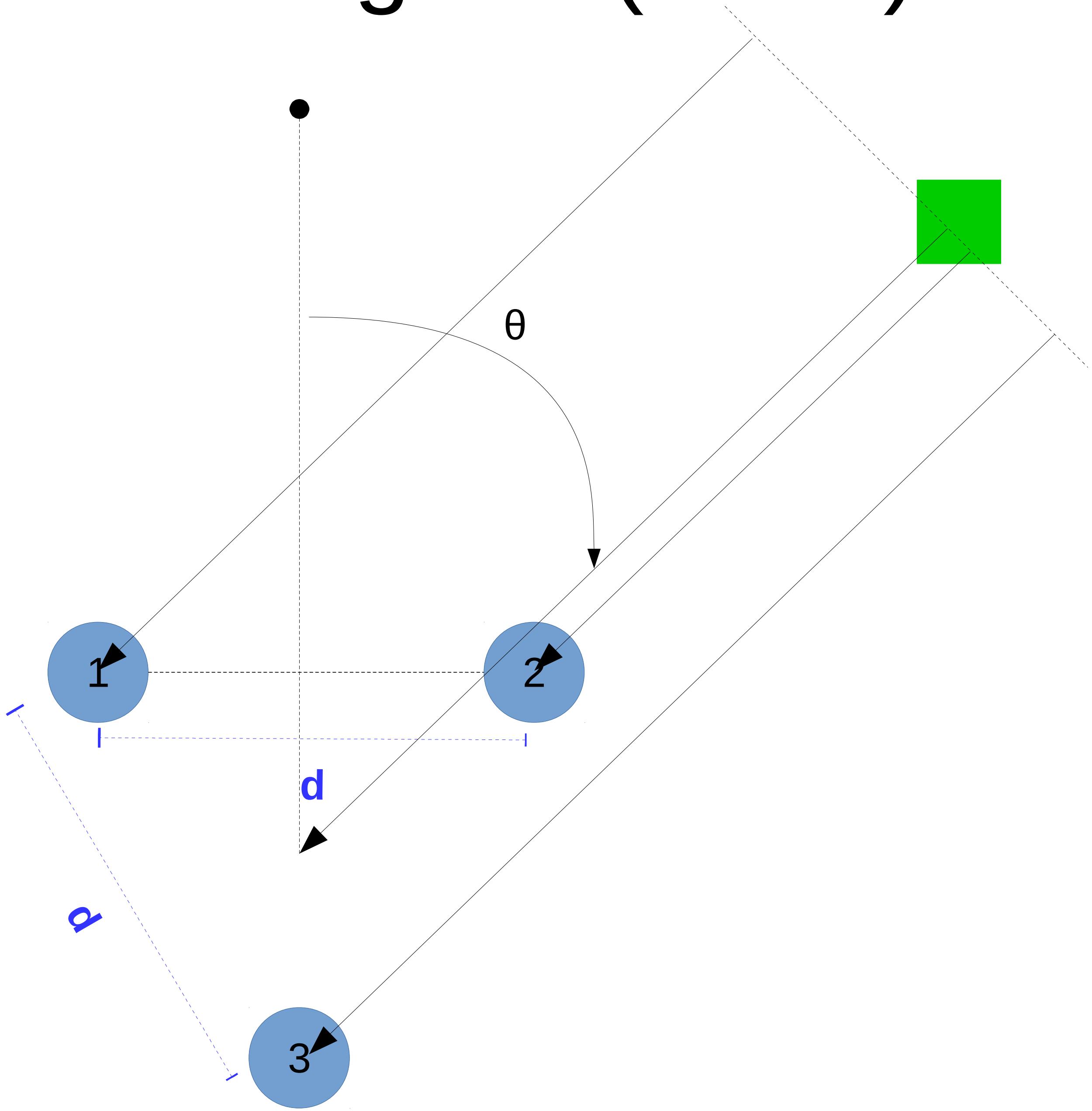
$$t_{3-1} = \frac{\sin(\theta) d * 2}{V_{sound}}$$



Para tres micrófonos en un arreglo triangular (AIRA)

$$t_{2-1} = \frac{\sin(\theta) d}{V_{sound}}$$

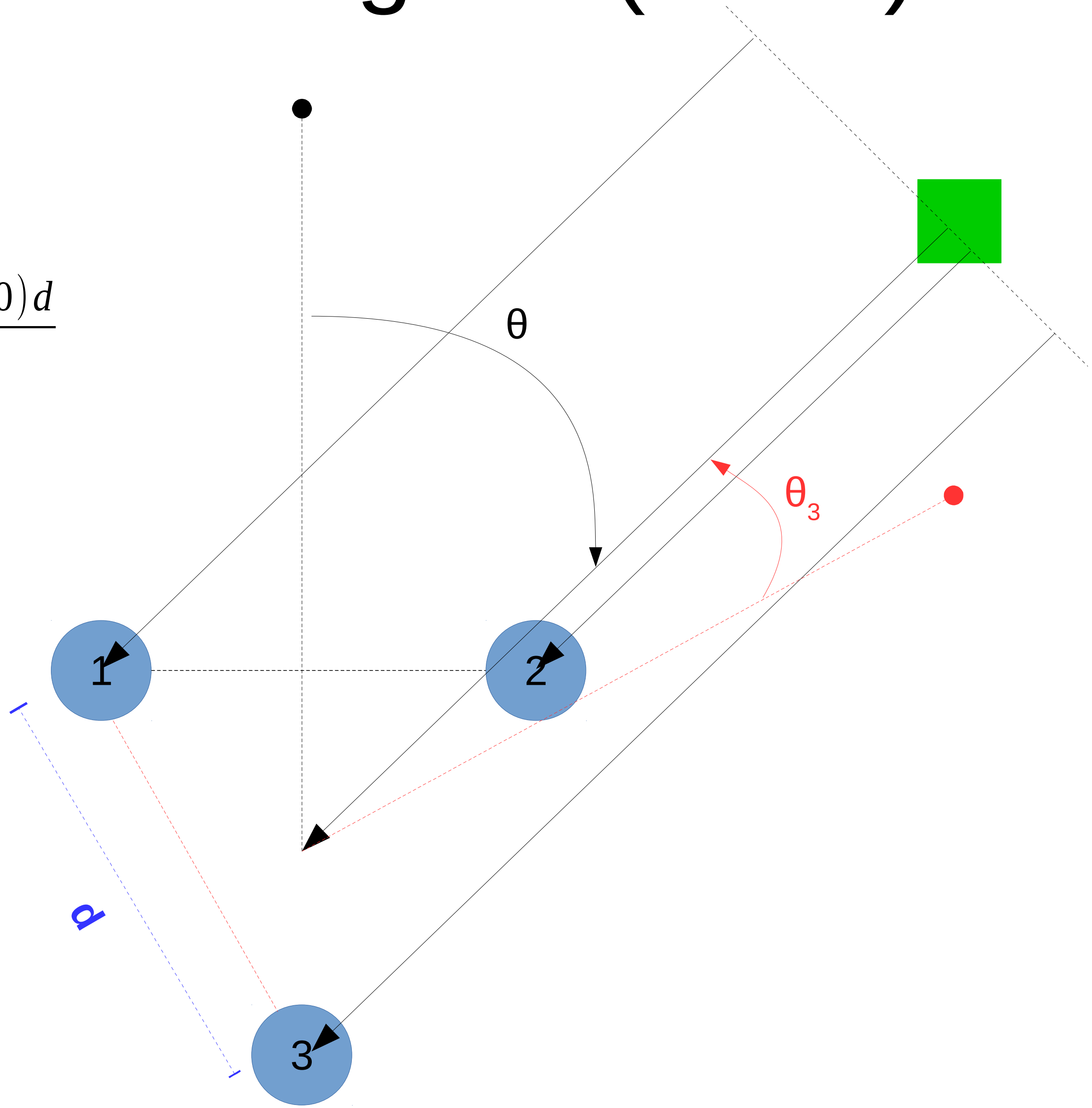
$$t_{3-1} = ???$$



Para tres micrófonos en un arreglo triangular (AIRA)

$$t_{2-1}=\frac{\sin(\theta)d}{V_{sound}}$$

$$t_{3-1}=\frac{\sin(\theta_3)d}{V_{sound}}=\frac{\sin(\theta-60)d}{V_{sound}}$$



Marcos de Referencia

- Marco de referencia global.
  - Del cual se mide el ángulo global.
- Marcos de referencias locales.
  - Entre cada par de micrófonos.
    - De los cuales se obtienen los desfases que se requieren para el cálculo del *direction vector*.
- Todos los marcos de referencia tienen que ser consistentes para que el *direction vector* sea análogo a la realidad.

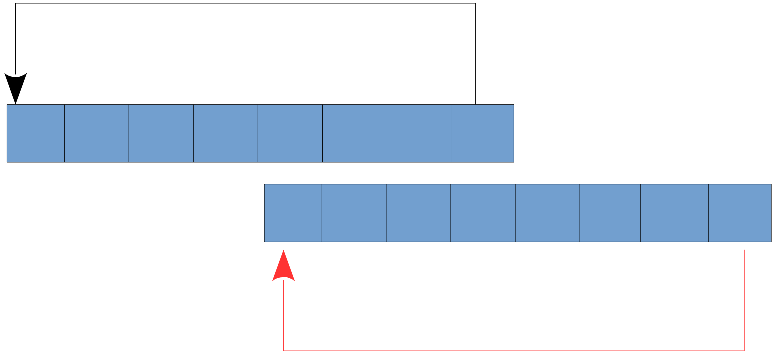
Otras Consideraciones para el Desfase por Frecuencia

- Podemos desfasar a nivel inter-muestra.
  - Ya que la ecuación toma el tiempo de desfase en segundos, no en muestra.
- Podemos desfasar “negativamente”.
  - Haciendo algo de trampa, podemos violar el mundo físico...

    ¡¿Que?!

Ejercicio de Desfase por Frecuencia

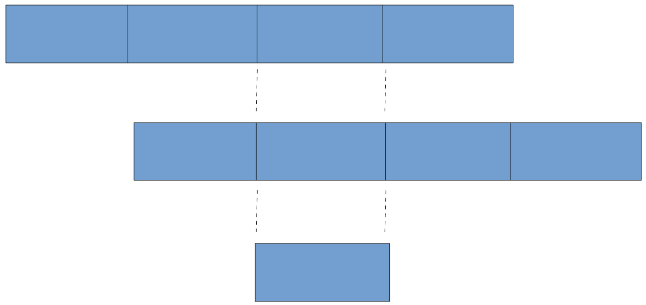
- Recordatorio: desfasar en frecuencia es cíclicIo.
- Con un desfase positivo, utilizando el proceso de *overlap-and-add* tendríamos:



- Algo similar sucede con un desfase negativo.

La solución:

- Utilizamos un buffer de cuatro ventanas de JACK para hacer FFT y el desfase por frecuencia.
- Solamente sumamos la ventana intermedia:



- Así, las muestras de al final e inicio se van a ventanas que se ignoran al sumar.
- PERO: sólo admite desfase menores a una ventana.

Ejercicio de Desfase

- Implementar esta forma de desfase.
- Revisar con baudline el resultado.

Eigenvectores y Eigenvalores

Eigen, ¿qué?

- Ya sé, ya sé.
  - Pero es importante.
- El concepto de los eigenvectores y eigenvalores lo inventó una gran entidad de pura maldad, llamada Cthulhu.
- Su propósito era hacer llorar a estudiantes de estadística y algebra lineal como una forma de encontrar a aquellos que eran masoquistas, y así darles entrada eterna al inframundo.

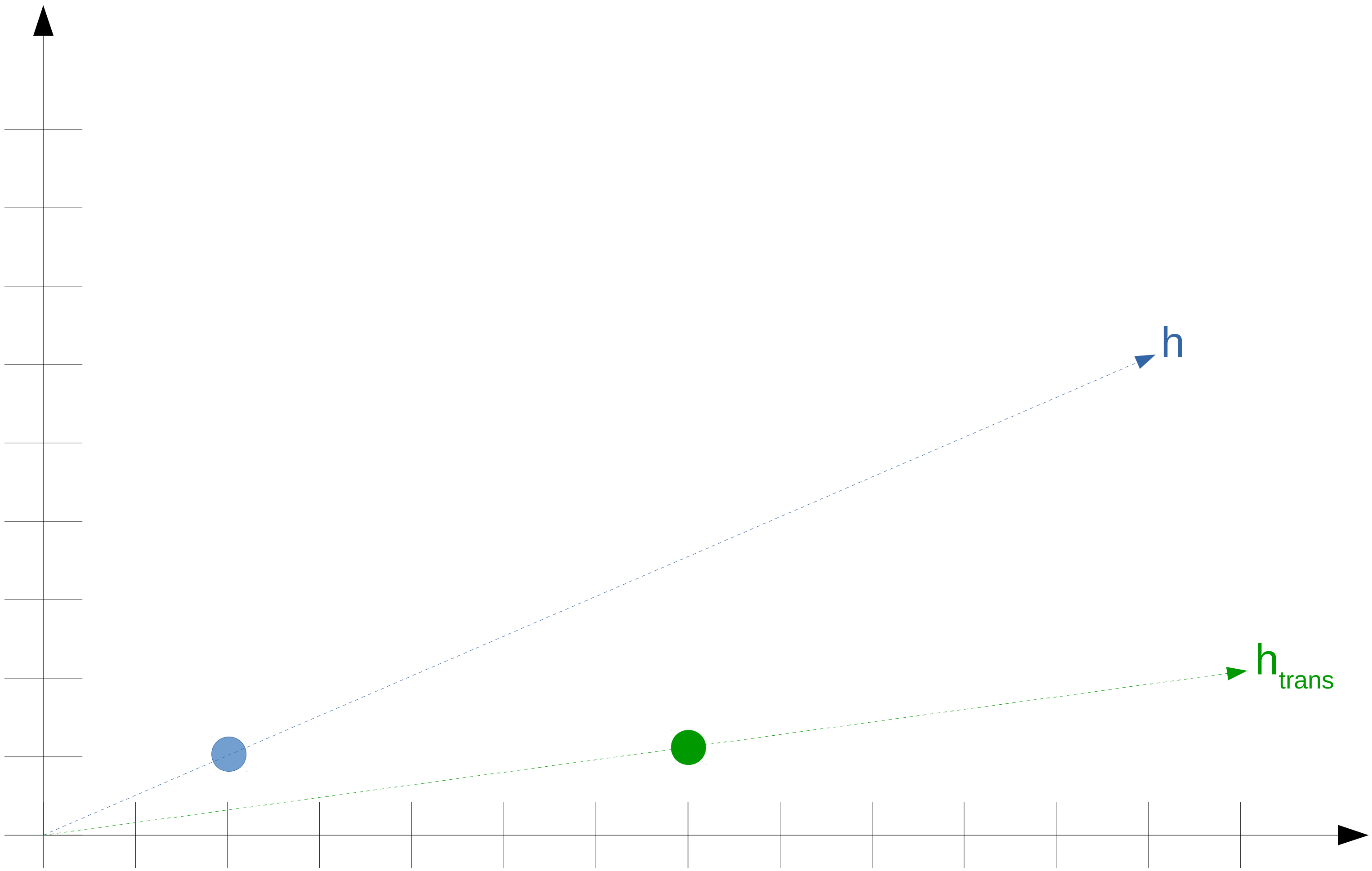
La idea es...

- Imaginen una matriz que normalmente es utilizada para transformar vectores.
- Por ejemplo, digamos que tenemos una matriz de transformación B, y un vector al que queremos transformar h a h_{trans}:

$$B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 3\end{bmatrix} \qquad h=\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}$$

$$h_{trans}=Bh=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 7\end{bmatrix}$$

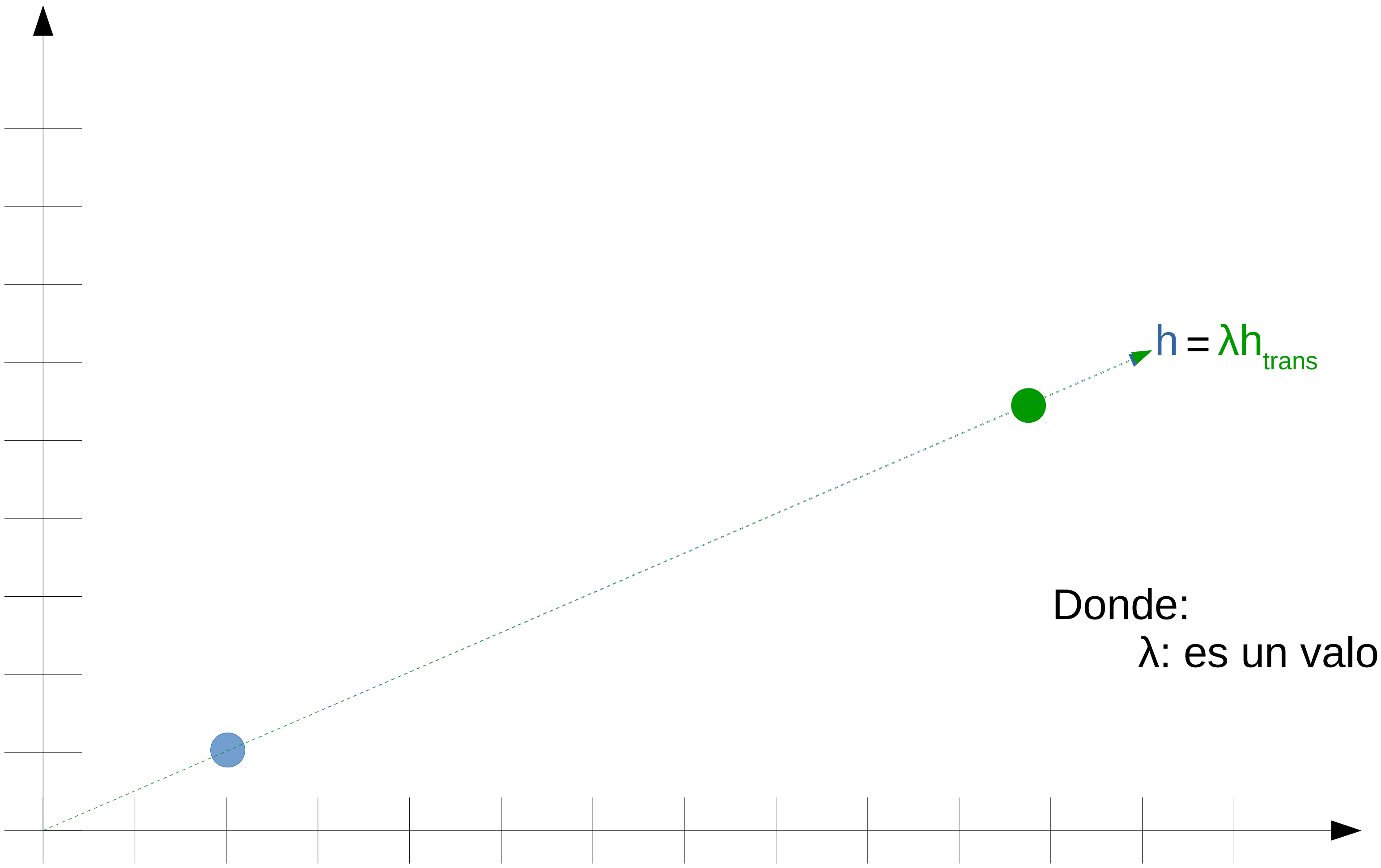
Este es el efecto de B en h



Pero...

- Hay vectores excepcionales que no les ocurre esto.
- Que al multiplicarlos por alguna B, su dirección no cambia.

Y sucede algo así



Donde:

λ: es un valor escalar

Eigenvector y Eigenvalores

- Estos vectores son los Eigenvectores de esa matriz.
  - También conocidos como “Vectores Característicos”.
- Y los valores λ que les corresponde, son sus Eigenvalores.
  - También conocidos como “Valores Característicos”.
- Dícese, v es un eigenvector de B, y λ su eigenvalor correspondiente si se cumple:

$$Bv = \lambda v$$

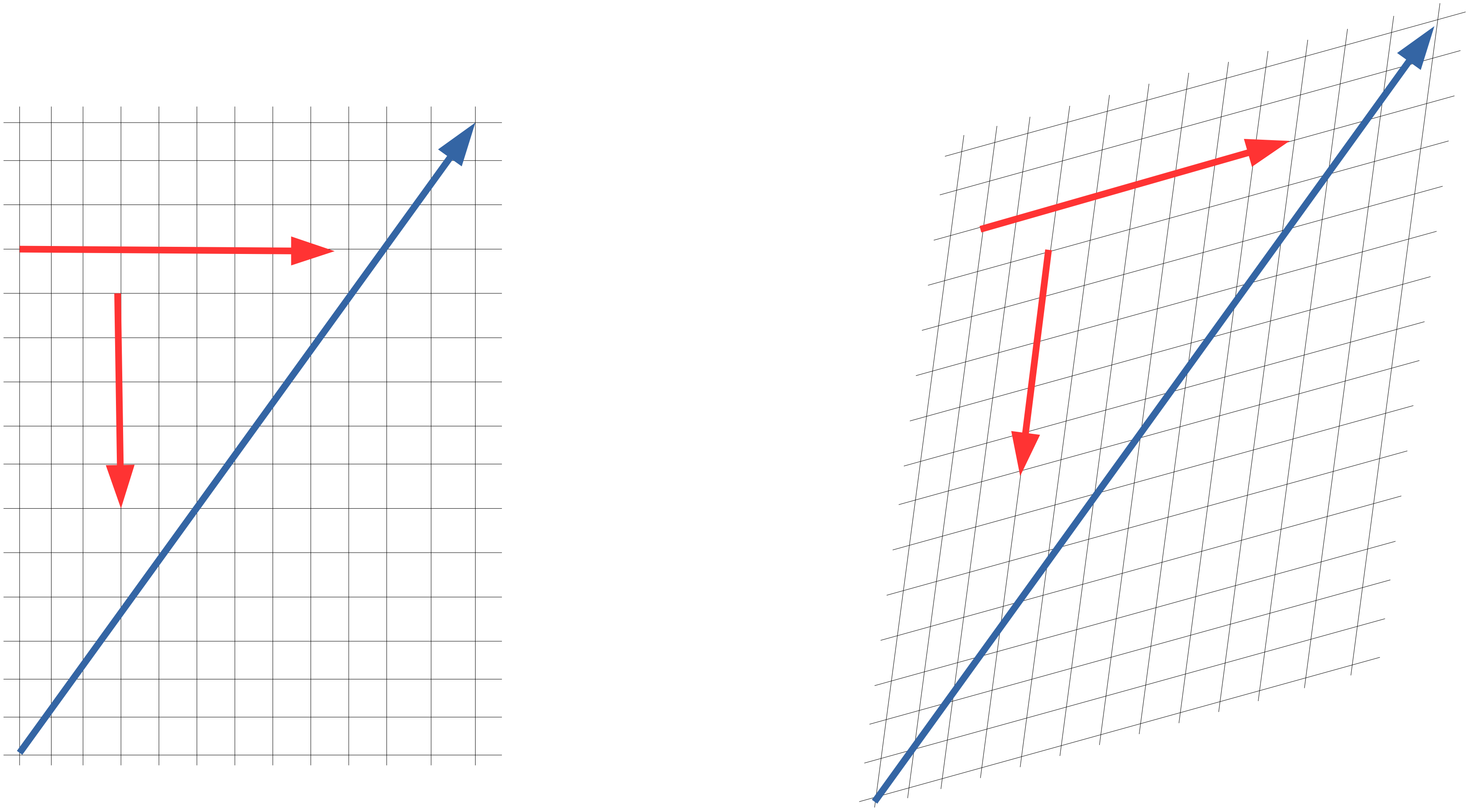
Y, ¿luego?

- Describen, de una cierta manera, tendencias numéricas internas de la matriz.
- Imaginen un pedazo de tela.
  - Cada nudo de la tela actúa como un posible vector.
- Ahora imaginen que estiran esa tela.
  - Esta acción es como aplicar la matriz B a ese conjunto de vectores.

Algo así...

Los vectores *azules*, aun cuando inician y terminan en el mismo punto de ambos planos cartesianos, tienen el mismo ángulo. Su única diferencia es en la magnitud.

Es un **eigenvector**, y la escala de la diferencia de magnitud es el **eigenvalor**.



De hecho...

- La palabra “eigen” en alemán significa: “inherente, característico, propio”.
    - También significa “peculiar”.

Háganme el bendito favor...

- Pero implica que estos vectores son descriptivos de lo que la matriz contiene.
- Esto es importante recordarlo, ya que es un elemento crítico del algoritmo MUSIC.

Propiedades de Eigenvectores/Eigenvalores

- Los vectores y los valores son correspondientes.
  - Un eigenvalor por eigenvector.
- Se pueden calcular los eigenvectores/eigenvalores de una matriz, siempre y cuando ésta sea **cuadrada**.
  - Tantos renglones como columnas.
- La cantidad de eigenvectores/eigenvalores que contiene una matriz es el número de columnas o renglones.
  - B tiene 2 eigenvectores/eigenvalores.

$$B=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Propiedades de Eigenvectores/Eigenvalores

- Los eigenvectores calculados, son ortogonales entre sí.
  - Es decir, si B tiene dos eigenvectores v_1 y v_2.
  - Entonces:

$$v_1 \cdot v_2 = 0$$

  - *Esto va a ser **muy** importante más adelante.*

¿Cómo se calculan?

- Si se estaban preguntando esto, Cthulhu ya está comenzando a seducirlos.
  - Déjenle entrar... es realmente muy benévolo.

risa maléfica endemoniada

¿Cómo se calculan?

- Este proceso se le conoce como **eigendescomposición**.
- La idea es descomponer a B de tal forma que:

$$B = V \Lambda V^{-1}$$

$$V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_K \end{bmatrix}$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_K \end{bmatrix}$$

Donde:

V: es una matriz que contiene por cada columna un eigenvector de B

Λ: una matriz, en la que en su diagonal contenga los eigenvalores de B

K: es el número de columnas o renglones de B, también conocido como **su tamaño**

¿Cómo se calculan?

- Primero se comienza con los eigenvalores, dícese con Λ.
- Esto implica la "diagonalización" de B.
- Lo cual involucra calcular otra matriz C, del mismo tamaño que B, tal que:

$$C^{-1}BC = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Usando el ejemplo en que: $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ Entonces: $C = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

A calcular C...

- Entonces:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} * \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

- Pasando a C^{-1} al otro lado de la igualdad:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Sistema de Ecuaciones Formalizando a los Eigenvectores

- Esto nos produce dos sistemas de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a\lambda_1 \\ c\lambda_1 \end{bmatrix}=\lambda_1\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b\lambda_2 \\ d\lambda_2 \end{bmatrix}=\lambda_2\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$$

- Vectorizando a las columnas podemos ver que realmente al calcular la matriz C, estamos realmente calculando los eigenvectores:

$$v_1=\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} \qquad v_2=\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$$

Recordemos...

- La ecuación que describe el requisito principal de los eigenvectores/eigenvalores.
- Con ella podemos ver algebráicamente que:

$$BV = \Lambda V$$

$$\left(B - \Lambda\right)V = 0$$

Y...

- Si multiplicamos ambos lados de la pasada ecuación por:

$$(B-\Lambda)^{-1}$$

- Obtenemos:

$$(B-\Lambda)^{-1}(B-\Lambda)V=(B-\Lambda)^{-1}*0$$

$$(B-\Lambda)^{-1}(B-\Lambda)V=0$$

$$V=0$$

Un momento...

- Los eigenvectores en V no pueden ser 0.
  - A lo mejor los eigenvalores pueden ser 0, pero no los eigenvectores.
- Esto significa que **no existe** la matriz:

$$(B-\Lambda)^{-1}$$

- Por lo tanto, la matriz (B – Λ) **no tiene inversa**.
- Lo cual significa que su *determinante* es 0.

Determinante

- Es un número indicativo de una matriz, el cual, si es cuadrada, se puede calcular así:

$$det\left(\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}\right) = ps - qr$$

- Hay muchos usos de este número en algebra lineal, pero el que es relevante aquí es:
  - Si el determinante de una matriz es 0, entonces dicha matriz no tiene inversa.

Esto nos facilita las cosas...

- Ya que:

$$det\left(B-\Lambda\right)=0$$

- Por lo tanto, en nuestro ejemplo:

$$det\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}\right)=0$$

Lo cual nos lleva a que si

- Hacemos la resta y calculamos el determinante:

$$det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda_1 & 0 \\ 1 & 3-\lambda_2 \end{bmatrix}\right)=0$$

$$((1-\lambda_1)(3-\lambda_2))-((0)(1))=0$$

Y si consideramos a λ_1 y λ_2 como instancias de la variable algebráica λ, entonces se vuelve en una ecuación cuadrática, la solución de la cual es:

$$(1-\lambda)(3-\lambda)=0$$

$$\lambda=2\pm\sqrt{(1)} \quad \begin{array}{l} \lambda_1=1 \\ \lambda_2=3 \end{array}$$

Con los eigenvalores calculados

- Los aplicamos a los sistemas de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$$

- Esto es equivalente a:

$$1a + 0c = 1a$$
$$a = a$$

$$1b + 0d = 3b$$
$$b = 3b$$
$$b = 0$$

$$1a + 3c = 1c$$
$$a + 3c = c$$
$$a = -2c$$

$$1b + 3d = 3d$$
$$b + 3d = 3d$$
$$b = 0$$

De lo cual

- Lo más rescatable es:

$$a=-2c \qquad\qquad b=0$$

- Lo cual equivale a:

$$v_1=\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2c \\ c \end{bmatrix} \qquad\qquad v_2=\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ d \end{bmatrix}$$

¿Qué significa eso?

- En el caso de v_1:
  - Cualquier vector que tenga su primer elemento igual al doble negativo que su segundo elemento, es un eigenvector de B con un eigenvalor de 1.
- En el caso de v_2:
  - Cualquier vector que su primer elemento sea igual a 0, es un eigenvector de B con un eigenvalor de 3.

Por ejemplo...

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Compruébenlo en Octave

Ya que están en Octave

- La función “eig” de octave hace la eigendescomposición:

  ```
  B = [1 0; 1 3]
  [e_vectors e_values] = eig(B)
  ```

- **Ojo:** “eig” sólo regresa una posible versión de los eigenvectores/eigenvalores.

¿Y, en C/C++?

- Una implementación popular está dentro la biblioteca de algebra lineal llamado **Eigen**.
  - Está en C++
  - Lo pueden instalar con:

    sudo apt-get install libeigen3-dev
  - Documentación: http://eigen.tuxfamily.org/dox/
  - Requiere añadir la ubicación de sus headers al compilar:

    -I/usr/include/eigen3

Código Ejemplo con Eigen

```
#include <iostream>
#include <Eigen/Eigen>

int main() {
   Eigen::MatrixXd A(2,2);
   A(0,0) = 1; A(0,1) = 2; A(1,0) =  2; A(1,1) =  3;
   std::cout << "The matrix A:\n" << A << std::endl;

   Eigen::EigenSolver<Eigen::MatrixXd> es(A);
   std::cout << "The eigenvalues of A are:\n" << es.eigenvalues() << std::endl;
   std::cout << "The eigenvectors of A are:\n" << es.eigenvectors() << std::endl;
}
```

Compilar con: g++ -I/usr/include/eigen3 ARCHIVO.cpp -o PROGRAMA

Eigen

- Hay mucho más que se puede hacer en Eigen:
  - Aritmética de matrices y vectores.
  - Transposición y conjugación.
  - Producto punto, inversa y determinante.
  - Etc.
- Material para clase: *eigen_examples.cpp*
  - Lo que se muestra en ese código es suficiente para llevar a cabo sus proyectos.
- Pero, la documentación de Eigen es muy completa.

  https://eigen.tuxfamily.org/dox/

Eigen: Números Complejos

- Eigen utiliza la implementación estándar de números complejos de C++:

  std::complex

- Por lo tanto, si se va a utilizar FFTw3, se requiere utilizar la función de *reinterpret_cast* para compatibilidad.
  - Ver jack_fft.cpp en la página del curso.

Covariancia

Recordemos

- Al centrar las señales antes de calcular el coeficiente Pearson, éste se convertía en:
  - La covariancia entre las señales, dividido entre sus desvaciones estándar.
- Entonces, la covariancia es también una medida de correlación entre las señales.
  - Nada más que sin desfasarlas primero.
  - Y no está normalizada.
  - Pero aún así indica una forma de correlación útil.

La Matriz de Covariancia

- Una forma rápida de calcular la covariancia entre varias señales, es calculando su matriz de covariancia, por medio de:

$$R = XX^H$$

Donde:

R: es la matriz de covariancia

X: es la matriz de las señales capturadas

^{H}: es la operación de transposición conjugada de matrices (Hermitiana)

$$\begin{bmatrix} 1+i1 & 2-i2 \\ 3+i3 & 4-i4 \end{bmatrix}^H = \begin{bmatrix} 1-i1 & 3-i3 \\ 2+i2 & 4+i4 \end{bmatrix}$$

Recordatorio

- X es la matriz de las señales **capturadas**.
  - 1 renglón por micrófono.
- La podemos modelar como: $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{S}\,\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} s_1(1) & s_1(2) & \cdots & s_1(N) \\ s_2(1) & s_2(2) & \cdots & s_2(N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_M(1) & s_M(2) & \cdots & s_M(N) \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} e^{-i2\pi f T_{1:1}} & e^{-i2\pi f T_{1:2}} & \cdots & e^{-i2\pi f T_{1:M}} \\ e^{-i2\pi f T_{2:1}} & e^{-i2\pi f T_{2:2}} & \cdots & e^{-i2\pi f T_{2:M}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{-i2\pi f T_{D:1}} & e^{-i2\pi f T_{D:2}} & \cdots & e^{-i2\pi f T_{D:M}} \end{bmatrix}$$

Donde:

X: es la matriz de las señales capturadas; cada renglón representa un micrófono

s_x: es una señal de origen

A: es la matriz que contiene los vectores de dirección (*direction vectors*)

$T_{d:m}$: es el retraso recibido de la señal s_m en el micrófono d

N: tamaño de la señal (o de la ventana de la señal)

Matriz de Covariancia

- Es una matriz cuadrada de tamaño del número de micrófonos.
- En el caso de 2 micrófonos, tiene la forma de:

$$R=\begin{bmatrix} cov\left(x_1,x_1\right) & cov\left(x_1,x_2\right) \\ cov\left(x_2,x_1\right) & cov\left(x_2,x_2\right) \end{bmatrix}$$

Matriz de Covariancia en una Frecuencia

- La covariancia normalmente se calcula con ventanas completas de las señales.
- Pero, es útil utilizar la información de covariancia de sólo una frecuencia para saber como las señales co-varían en dicha frecuencia.

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_1(1) & x_1(2) & \cdots & x_1(N) \\ x_2(1) & x_2(2) & \cdots & x_2(N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_M(1) & x_M(2) & \cdots & x_M(N) \end{bmatrix}$$

Matriz de Covarianza en una Frecuencia

- Si X está en el dominio de la frecuencia, y queremos calcular la covariancia de la segunda frecuencia (R_{f2}):

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix} x_1(1) & x_1(2) & \cdots & x_1(N) \\ x_2(1) & x_2(2) & \cdots & x_2(N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_M(1) & x_M(2) & \cdots & x_M(N) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{X}_{f_2}=\begin{bmatrix} x_1(2) \\ x_2(2) \\ \vdots \\ x_M(2) \end{bmatrix} \longrightarrow R_{f_2}=X_{f_2} X_{f_2}^H$$

Matriz de Covariancia en una Frecuencia

- Pero esto sólo utiliza la información de la frecuencia en **un momento en el tiempo**
- Esto no entrega una matriz de covariancia “confiable”, ya que no es posible observar una varianza sin más muestras.
- Por lo tanto, al calcular la matriz de covariancia de una frecuencias es importante que se utilicen varias muestras de cada frecuencia a lo largo del tiempo.
- Es decir...

Matriz de Covariancia en una Frecuencia

$$\boldsymbol{X_1}=\begin{bmatrix} x_{1:1}(1) & x_{1:1}(2) & \cdots & x_{1:1}(N) \\ x_{1:2}(1) & x_{1:2}(2) & \cdots & x_{1:2}(N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1:M}(1) & x_{1:M}(2) & \cdots & x_{1:M}(N) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{X_2}=\begin{bmatrix} x_{2:1}(1) & x_{2:1}(2) & \cdots & x_{2:1}(N) \\ x_{2:2}(1) & x_{2:2}(2) & \cdots & x_{2:2}(N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{2:M}(1) & x_{2:M}(2) & \cdots & x_{2:M}(N) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{X_3}=\begin{bmatrix} x_{3:1}(1) & x_{3:1}(2) & \cdots & x_{3:1}(N) \\ x_{3:2}(1) & x_{3:2}(2) & \cdots & x_{3:2}(N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{3:M}(1) & x_{3:M}(2) & \cdots & x_{3:M}(N) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{X_{f_2}}=\begin{bmatrix} x_{1:1}(2) & x_{2:1}(2) & x_{3:1}(2) \\ x_{1:2}(2) & x_{2:2}(2) & x_{3:2}(2) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{1:M}(2) & x_{2:M}(2) & x_{3:M}(2) \end{bmatrix}$$

$$R_{f_2}=X_{f_2}X_{f_2}^H$$

Matriz de Covariancia Muestrada
(*Sample Covariance Matrix*)

¿Para qué es útil?

- Ya estamos listos...

MUSIC

(ahora sí)

Premisa de MUSIC

- ¿Que sucedería si le sacamos los eigenvalores a la matriz de covariancia?
- ¿Que simbolizarían los eigenvectores?
  - Los vectores que describen la manera en la que la covariancia (o la correlación) entre las señales se *comporta*.

Eigenvectores de Covariancia

- Estos estarían MUY relacionados con los vectores de dirección (*direction vectors)* con los cuales modelamos nuestras señales capturadas.

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{S}\,\boldsymbol{A}$$

$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} s_1(1) & s_1(2) & \cdots & s_1(N) \\ s_2(1) & s_2(2) & \cdots & s_2(N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_M(1) & s_M(2) & \cdots & s_M(N) \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} e^{-i2\pi f T_{1:1}} & e^{-i2\pi f T_{1:2}} & \cdots & e^{-i2\pi f T_{1:M}} \\ e^{-i2\pi f T_{2:1}} & e^{-i2\pi f T_{2:2}} & \cdots & e^{-i2\pi f T_{2:M}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{-i2\pi f T_{D:1}} & e^{-i2\pi f T_{D:2}} & \cdots & e^{-i2\pi f T_{D:M}} \end{bmatrix}$$

Donde:

X: es la matriz de las señales capturadas; cada renglón representa un micrófono

s_x: es una señal de origen

A: es la matriz que contiene los vectores de dirección (*direction vectors*)

$T_{d:m}$: es el retraso recibido de la señal s_m en el micrófono d

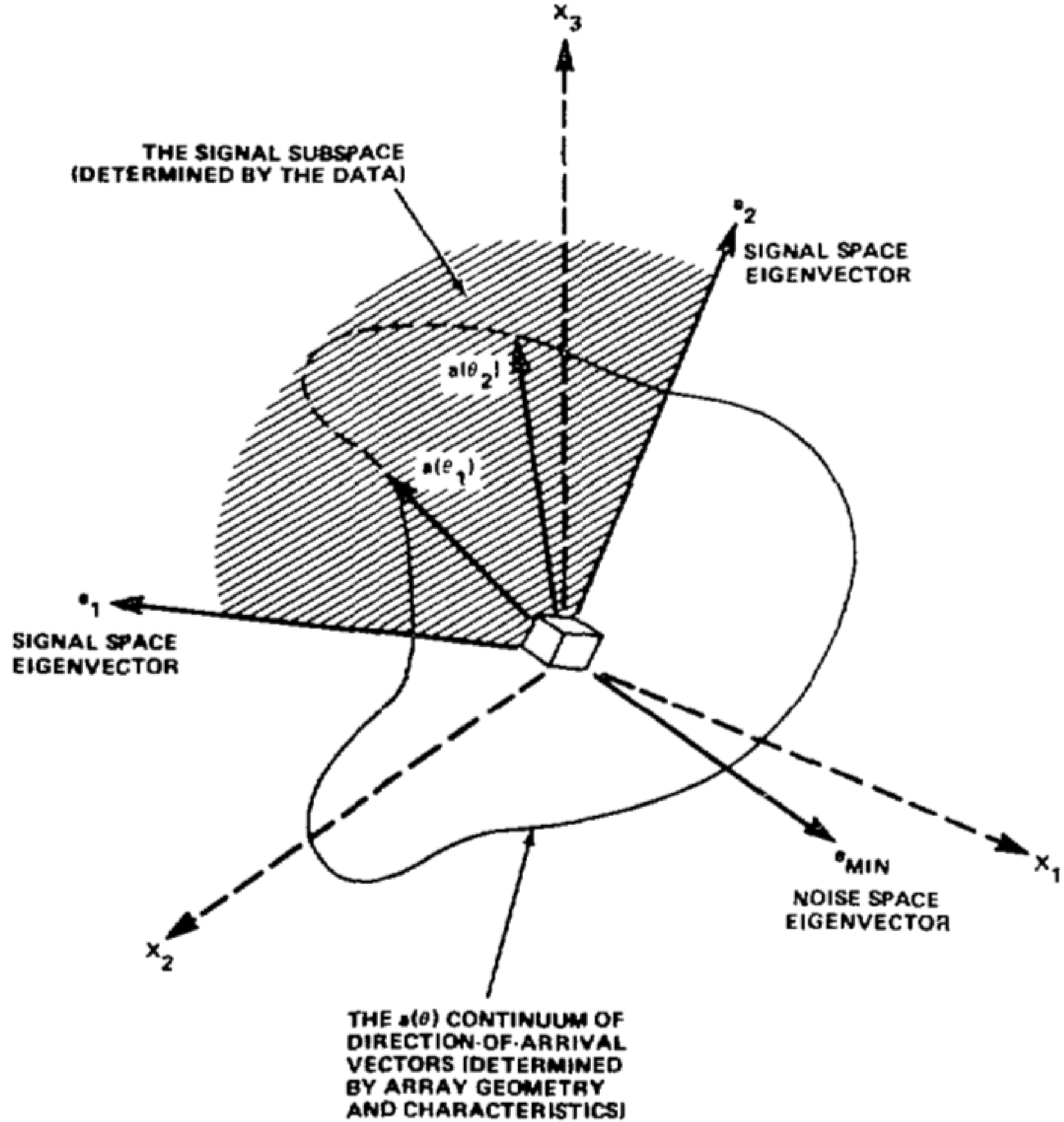
N: tamaño de la señal (o de la ventana de la señal)

Direction Vectors

- Recordemos que esto es lo que queremos estimar.
- El direction vector dictamina el desfase temporal que tiene cada señal de origen en cada micrófono.
- Desfase ==> Dirección de Arribo.

Direction Vectors

- Desgraciadamente los eigenvectores NO son los direction vectors.
  - Son sólo una versión de ellos, proyectados de otro espacio matemático.
    - Recordemos que λvm puede tener infinitas combinaciones.



e_1, e_2, e_{MIN} ARE THE EIGENVECTORS OF S CORRESPONDING TO EIGENVALUES $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_{MIN} > 0$

e_1, e_2 SPAN THE SIGNAL SUBSPACE

$a(\theta_1)$, $a(\theta_2)$ ARE THE INCIDENT SIGNAL MODE VECTORS

¡¿Entonces?!
¡¿Todo esto para nada?!

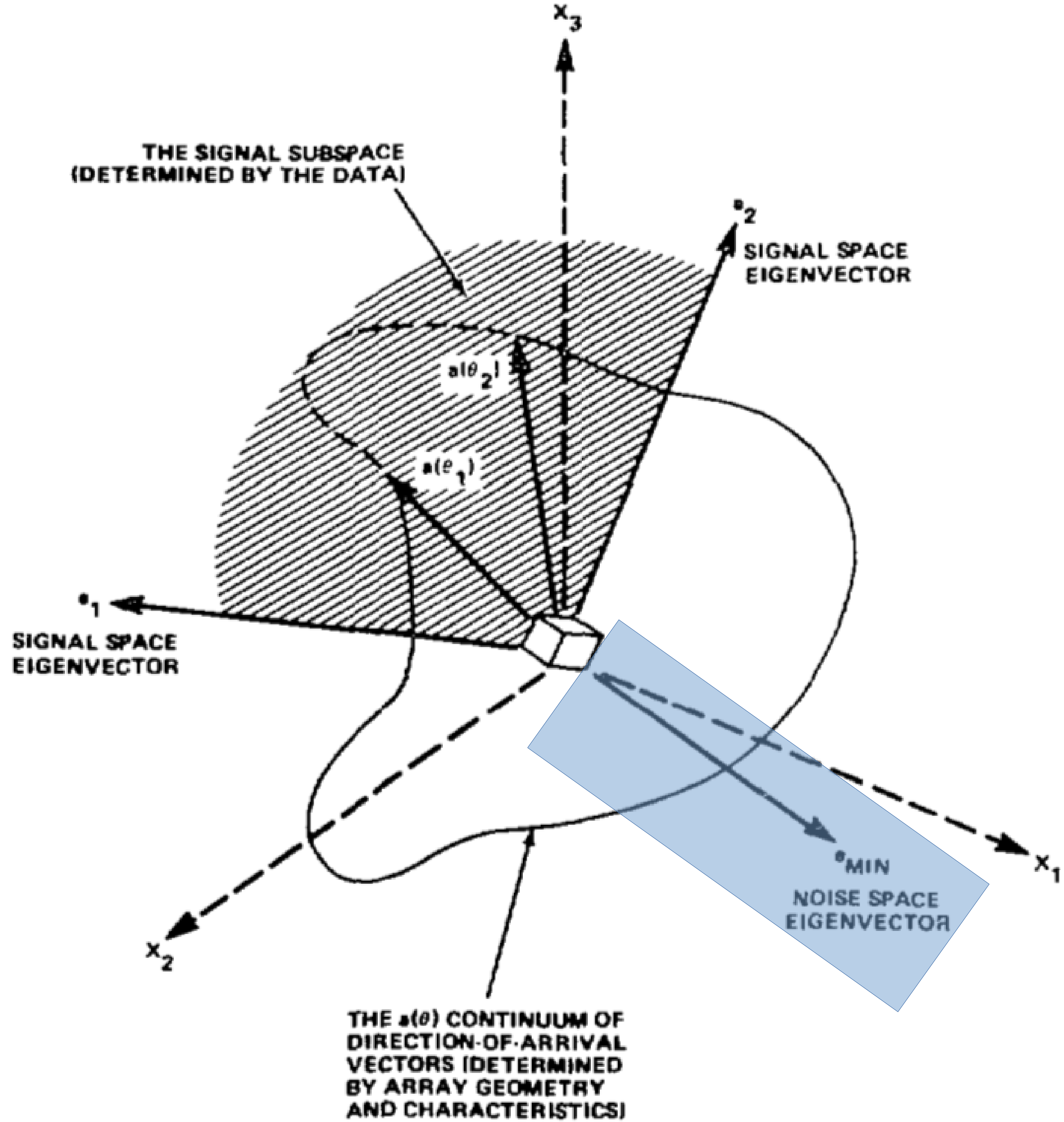
- No necesariamente.

Ejemplo

- Asumamos que tenemos 2 señales de origen y 3 micrófonos.
  - Más micrófonos que señales.
- La matriz de covariancia R será de tamaño 3.
- Lo cual significa que vamos a calcular 3 eigenvectores.

Pero...

- Son sólo 2 señales.
- Realmente nada más 2 de esos eigenvectores están relacionados con los direction vectors.
- El otro vector es... ¿ruido?
  - No necesariamente describe el ruido.
  - Pero está describiendo un subespacio “ruidoso”.



e_1, e_2, e_{MIN} ARE THE EIGENVECTORS OF S CORRESPONDING TO EIGENVALUES $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_{MIN} > 0$

e_1, e_2 SPAN THE SIGNAL SUBSPACE

$a(\theta_1), a(\theta_2)$ ARE THE INCIDENT SIGNAL MODE VECTORS

La Parte Crítica

- Este eigenvector adicional es ortogonal a los otros eigenvectors.
- Mejor dicho, **este eigenvector “ruidoso” es ortogonal a los direction vectors**.

Entonces

- Podemos probar con varios direction vectors potenciales.
  - Cada uno apuntando a las diferentes direcciones que queramos que tenga el espectro MUSIC.
  - Tantas como queramos.
- Y en cada prueba, sacarle el producto punto con el eigenvector “ruidoso”.
- Si el producto punto es cercano a 0, significa que es ortogonal a éste.
- Lo cual significa que **es un direction vector relacionado con los eigenvectores de las direcciones de la señales.**

Y, ¿como sabemos cuáles son ruidosos y cuáles no?

- Por medio de sus eigenvalores.
- Se ordenan los eigenvectores de acuerdo a su eigenvalor.
- Se escogen los que tienen los eigenvalores más grandes.
  - Y los que tienen los eigenvalores más bajos, por ser “ruidosos”, tendrán el mismo valor, y uno muy cercano a 0.

En resumen

$$R = XX^H$$
$$R = V\Lambda V^{-1}$$

Se calcula R con datos de una frecuencia.

$$V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_K \end{bmatrix} \qquad \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_K \end{bmatrix}$$

Reordenamos a V de acuerdo a los valores en Λ

Decidimos cuáles son los eigenvectores “ruidosos”

Calculamos el producto punto con varios potenciales direction vectors, para producir el espectro de MUSIC.

$$P_{music}(T) = \frac{1}{a_{pot}(T)' * Qn * Qn' * a_{pot}(T)}$$

T: desfase (ligado a una dirección) a probar
a_{pot}(T): direction vector a probar ligado a T
Q_n: matriz que contiene los eigenvectors ruidosos
P_{music}(T): valor en el espectro de MUSIC

Notas

- El producto punto está en el denominador para que, cuando dé 0, se obtengan valores grandes y se parezca a los CCVs que hemos estado utilizando.
- El producto punto se calcula así porque la cantidad de eigenvectores es posible que no sea mayor a uno.
  - Así se saca la ortogonalidad de un vector vs. a varios.

Notas

- Claro está, entre más vectores “ruidosos” mayor posibilidad de que la ortogonalidad calculada sea más cercana a la realidad.

Prueba en Octave

- Descarguen:
  - music_complete.m
  - music_multicomplete.m

Ojo

- En estos ejemplos se utilizan señales con frecuencia única.
  - Se utiliza toda la señal para hacer la matriz de covariancia, en vez de sólo los valores de su frecuencia.
  - No se les hace FFT para simular el desfase, porque no es necesario.

music_complete

- Crea una señal y la emula entrando en dos micrófonos.
- Calcula el vector MUSIC de -90 a 90 grados, con un incremento de 0.1 grados.
- Presenta dos figuras:
  - Figura 1: la señales capturadas.
  - Figura 2: el espectro MUSIC calculado

music_multicomplete

- Crea dos señales y las emula entrando en tres micrófonos en un arreglo linear.
- Calcula el vector MUSIC de -90 a 90 grados, con un incremento de 0.1 grados.
- Presenta dos figuras:
  - Figura 1: la señales capturadas.
  - Figura 2: el espectro MUSIC calculado

Ruido

- En ambos se puede incrementar el ruido cambiando el valor de:

    noise_w

- Cámbienlo, y corran los scripts varias veces.
    - Recuerden que el ruido se crean con un generador de números al azar.
- ¿El ruido impacta a MUSIC?

Ruido

- En ambos se puede incrementar el ruido cambiando el valor de:

  noise_w

- Cámbienlo, y corran los scripts varias veces.
  - Recuerden que el ruido se crean con un generador de números al azar.
- ¿El ruido impacta a MUSIC?

- No mucho. De vez en cuando algunos picos no se muestran, pero es bastante clara la presencia de las señales aún con ruido.

Ojo... de nuevo

- En estos ejemplos se utilizan señales con frecuencia única.
- Generalizar MUSIC a aplicarse a todas las frecuencias es parte de los problemas a vencer si se quieren usar señales complicadas.
  - Como voz.

Recordatorio: Direction Vectors

- Los direction vectors se basan en desfases en el dominio de la frecuencia, y sólo son de UNA frecuencia.

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{S}\,\boldsymbol{A}$$

$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} s_1(1) & s_1(2) & \cdots & s_1(N) \\ s_2(1) & s_2(2) & \cdots & s_2(N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_M(1) & s_M(2) & \cdots & s_M(N) \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} e^{-i2\pi f T_{1:1}} & e^{-i2\pi f T_{1:2}} & \cdots & e^{-i2\pi f T_{1:M}} \\ e^{-i2\pi f T_{2:1}} & e^{-i2\pi f T_{2:2}} & \cdots & e^{-i2\pi f T_{2:M}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{-i2\pi f T_{D:1}} & e^{-i2\pi f T_{D:2}} & \cdots & e^{-i2\pi f T_{D:M}} \end{bmatrix}$$

Donde:

X: es la matriz de las señales capturadas; cada renglón representa un micrófono

s_x: es una señal de origen

A: es la matriz que contiene los vectores de dirección (*direction vectors*)

$T_{d:m}$: es el retraso recibido de la señal s_m en el micrófono d

N: tamaño de la señal (o de la ventana de la señal)

Resumen de **MUSIC para una Frecuencia**

$$R = XX^H$$

Se calcula R con datos de una frecuencia.

$$R = V\Lambda V^{-1}$$

$$V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_K \end{bmatrix} \qquad \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_K \end{bmatrix}$$

Reordenamos a V de acuerdo a los valores en Λ

Decidimos cuáles son los eigenvectores “ruidosos”

Calculamos el producto punto con varios potenciales direction vectors, para producir el espectro de MUSIC.

$$P_{music}(T) = \frac{1}{a_{pot}(T)' * Qn * Qn' * a_{pot}(T)}$$

T: desfase (ligado a una dirección) a probar
$a_{pot}(T)$: direction vector a probar ligado a T
Q_n: matriz que contiene los eigenvectors ruidosos
$P_{music}(T)$: valor en el espectro de MUSIC

MUSIC de Banda Ancha

- Normalmente se escoge un rango de frecuencias y se lleva a cabo MUSIC para cada una de las frecuencias en ese rango.
- Después se hace un promedio a través de las frecuencias por cada direction vector, “aplastando” los diferentes espectros MUSIC en uno sólo.
  - Se puede utilizar los máximos en vez del promedio.

Problema en Línea

- ¿Creen que se pueda correr MUSIC en línea?
  - La matriz de covariancia se puede crear rápido.
    - Dos for's anidados.
    - Pero se tiene que hacer para cada frecuencia.
  - La eigendescomposición es normalmente lenta.
    - Pero no tanto que sea limitante (Eigen es eficiente).
    - Depende de la computadora.
    - Se puede acelerar utilizando la *descomposición generalizada de valor singular*.
      - Es una generalización de la eigendescomposición pero para matrices rectangulares. También impone restricciones que la hacen eficiente.

Problema en Línea

- Continuación...
  - La búsqueda de direction vectors puede ser lenta si se quiere un espectro MUSIC con alta resolución.
    - Pero esto lo podemos calibrar si fuera necesario.
  - Llevar a cabo MUSIC por cada frecuencia puede elevar mucho el costo computacional.
    - Pero seleccionando las frecuencias apropiadas puede amortiguar dicho costo.

Problema en Línea

- Un problema principal de esta técnica es el requerimiento de recursos de computación elevados para llevar a cabo en línea.
  - Pero “elevados” a finales de los 80's ya no ***debería*** ser un problema ahora.

Técnica:

Basado en Beamforming.

Beamforming

- Este tema está muy relacionado con el tema que veremos después en el curso:
  - Separación de Fuentes por medio Beamforming
- Pero es importante hacerle mención aquí ya que es una forma bastante viable de estimación de dirección de arribo.
  - De hecho, mata a dos pájaros de un tiro.

Beamforming

- Entraré en más detalle después, pero...
- Es una forma de filtrado direccional:
  - Dado una dirección deseada, la técnica reduce las interferencias que provengan de otras direcciones.

¿Dirección Deseada?

- Pero este tema habla de estimar esa dirección.
- Este filtro requiere de esta estimación inicialmente.

- Por eso este tema se ve después, pero, tomando inspiración de MUSIC...

Exploración

- Si tenemos un sistema que pretende obtener la información de audio que proviene de una dirección,
- Podríamos probar diferentes direcciones, y medir la energía del audio que proviene de dicha dirección.
- Si la energía del audio es alta, probablemente ahí hay un señal de origen.

Espectro Beamforming

- De manera similar que con MUSIC.
- Por cada dirección potencial:
  - Se crea un filtro direccional
  - Se mide la energía del audio en esa dirección
- Creando así un espectro beamforming, parecido a los CCVs y espectro MUSIC que hemos estado viendo.

Pero...

- Ya que para poder implementarlo requerimos conocer los conceptos de beamforming, dejaremos los detalles de su implementación para cuando lleguemos al tema de:
  - Separación de Fuentes por medio de Beamforming

Siguiente Clase:

Bases de Separación de Fuentes